Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 172

Heft 1

Ausgegeben den 10. September 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

Band 172. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Jolles, Stanislaus, Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades	1
v. Sz. Nagy, Julius, Zur Theorie der algebraischen u. gewisser transzendenten Gleichungen	25
Hasse, Helmut, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper	37
Hasse, Helmut, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper	55

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades.

Von *Stanislaus Jolles* in Berlin.

In meinen Abhandlungen aus dem 33. und 36. Bande der Mathematischen Zeitschrift ist sowohl die projektive wie metrische Theorie des polaren F^2-Gebüschverbandes einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 begründet und entwickelt. In der vorliegenden Arbeit sind beide Theorien weiter ausgebaut. Es gelingt in ihr die in dem polaren Gebüschverbande gelegenen Polarbündelheere der einscharig in der Kongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloide einfach zu konstruieren und im Anschluß daran alle dem gleichseitigen Fokalparaboloide von C_1^1 umbeschriebenen gleichseitig parabolischen Ebenengewinde dritter Ordnung zu ermitteln. An diese Ergebnisse reiht sich dann eine ausführliche Untersuchung der Hauptachsenflächen aller Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. Berücksichtigt sind nur die allgemeinen hyperbolischen und elliptischen linearen Strahlenkongruenzen. Dem Übertragen der gewonnenen Sätze auf die parabolischen und auf die metrisch bedingten linearen Strahlenkongruenzen dürften keine größeren Schwierigkeiten entgegenstehen.

Für die synthetische Geometrie ist es besonders wertvoll, durch scharf charakterisierende Bezeichnungen das Verständnis zu erleichtern. Nun ist jeder Büschel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltener Flächen zweiten Grades autodual. Somit benutze ich jetzt, um das gebührend hervorzuheben, den von Rudolf Sturm für dieses autoduale Gebilde geprägten Ausdruck „Büschelschar“ und aus analogem Grunde die Ausdrücke „Bündelheer“ und „Gebüschverband“.

A. Die Polarbündelheere der Paraboloide im polaren F^2-Gebüschverbande einer linearen Strahlenkongruenz.

1. Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ij} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist bekanntlich der Ort der Mittelpunkte aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Jeder Punkt von γ bildet den gemeinsamen Mittelpunkt ∞^1 solcher Flächen [1]). Sind auf γ die Punkte X, Y bzw. die Mittelpunkte zweier einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades X^2, Y^2, so sind X^2, Y^2 durch eine Büschelschar solcher Flächen verbunden [2]), und deren Mittelpunkte erschöpfen die Punkt-

[1]) Jolles, Die Metrik im polaren F^2-Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. **36** (1932), Nr. 22.

[2]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 3.

reihe auf der Zentragerade $XY = t$ der Büschelschar [3]). Zu X^2, Y^2 können je zwei einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiten Grades mit verschiedenen Mittelpunkten gewählt werden.

Die Punkte X, Y sind bzw. die gemeinsamen Mittelpunkte zweier Büschelscharen konzentrischer [1]) einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Beide Büschelscharen gehen durch das zerfallene einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationsparaboloid [4]) mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade. Da sie eine Fläche gemein haben, so liegt jede Fläche der einen Büschelschar mit der anderen Büschelschar in demselben Bündelheere [5]) einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. Seine ∞^2 Büschelscharen haben die gemeinsame Zentragerade t. Sie heiße die „Zentragerade" des Bündelheeres. Jeder Punkt dieser Zentragerade ist der Mittelpunkt je einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener konzentrischen Fläche zweiten Grades. Alle diese Büschelscharen gehen durch das zerfallene einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞. Folglich enthält unser Bündelheer mit der Zentragerade t von jeder von ihnen außer dem allen gemeinsamen zerfallenen Rotationsparaboloide noch eine Fläche und somit alle. Die Zentragerade t kann jede Gerade der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 sein. Also ist bewiesen:

I. *Jede Gerade* t *in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist die Zentragerade je eines Bündelheeres einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. Die ∞^2 Büschelscharen eines solchen Bündelheeres umfassen ∞^1 Büschelscharen konzentrischer Flächen. Jeder Punkt seiner Zentragerade* t *ist der Mittelpunkt je einer von ihnen. Die Büschelschar geht durch das zerfallene einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ als Doppelpunktsgerade. Der Gebüschverband [6]) aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades kann aus ∞^2 Bündelheeren mit je einer Zentragerade zusammengesetzt werden. Die Gesamtheit der Zentrageraden erschöpft das Geradenfeld der Fluchtebene γ im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1.*

Nach früher Bewiesenem [7]) ist die mit der Zentragerade t inzidente, von der Fluchtebene γ verschiedene Tangentenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 die gemeinsame Symmetrieebene einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. Dabei erschöpfen alle zu dieser Symmetrieebene senkrechten Hauptachsen der Büschelscharflächen den Büschel paralleler, die Zentragerade t rechtwinklig schneidender Strahlen aus dem Komplexe Γ^2, der von den Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades gebildet wird. Dies berücksichtigt, folgt aus vorstehendem Lehrsatze:

II. *In jedem Bündelheere einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade* t *liegt eine Büschelschar, deren Flächen die von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 verschiedene, mit* t *inzidente Tangentenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 zur gemeinsamen Symmetrieebene haben. Die zu dieser Symmetrieebene senkrechten Hauptachsen der Büschelscharflächen schneiden* t *rechtwinklig und bilden einen Parallelstrahlen-*

---

[3]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 12.

[4]) A. a. O., Nr. 11.

[5]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **149** (1919), Nr. 9.

[6]) A. a. O., Nr. 20.

[7]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 18.

büschel im Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades [8]).

2. Im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades besteht [9]) die in C_1^1 enthaltene Regelschar der Polfläche eines Bündelheeres aus den Doppelpunktsgeraden der im Bündelheere gelegenen zerfallenen Flächen. Die Doppelpunktsgeraden der zerfallenen Flächen eines Bündelheeres von $\Pi(F^2)$ mit einer Zentragerade t sind aber die mit t inzidenten Strahlen von C_1^1. Demnach gilt:

I. *Ein Bündelheer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer Zentragerade* t *hat im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades das einscharig in C_1^1 enthaltene, durch* t *gehende Paraboloid zur Polfläche. Umgekehrt hat ein einscharig in C_1^1 enthaltenes Paraboloid in $\Pi(F^2)$ ein Polarbündelheer mit einer auf dem Paraboloide gelegenen Zentragerade* t. *Durchläuft das Paraboloid das Paraboloidenbündelheer von $\Pi(F^2)$, so durchläuft die Zentragerade* t *das Strahlenfeld der Fluchtebene γ im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1. Die Zentragerade* t *wird insbesondere zum unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞, sobald das Paraboloid in das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞ übergeht.*

Auf drei Polarbündelheere im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ dreier einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide war ich schon früher gestoßen. Zunächst auf das Bündelheer aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide als das Polarbündelheer des zerfallenen einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationsparaboloides mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade [10]), und dann auf die Polarbündelheere der beiden einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide mit den beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 bzw. als Hauptachsen [11]).

Je zwei Bündelheere einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit bzw. zwei Zentrageraden t, t′ schneiden einander in einer Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades mit dem gemeinsamen Mittelpunkte tt′. Zu dieser Schnittbüschelschar ist die durch die Polflächen der Bündelheere gehende Büschelschar polar [12]). Somit ist dargetan:

II. *Im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades ist zu jeder Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide polar.*

Fallen insbesondere die Zentrageraden t, t′ unserer beiden oben gegebenen Bündelheere auf die beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1, ist also der Mittelpunkt der Schnittbüschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiten Grades der Mittelpunkt C der Kongruenz, so besteht diese Büschelschar aus den Antidurchmesserflächen [13]) von C_1^1. Nun schneiden bekanntlich die eigentlichen Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide die Hauptsymmetrieachse c_d der linearen Kongruenz rechtwinklig. Somit hat jedes dieser gleichseitigen Paraboloide

---

[8]) A. a. O., Nr. 19.

[9]) Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. **33** (1931), Nr. 4.

[10]) A. a. O., Nr. 1.

[11]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 16.

[12]) Die unter [9]) angeführte Abhandlung, Nr. 5.

[13]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 2.

mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 außer dem unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ noch je einen Strahl des Kongruenzmittelpunktes C gemein. Er ist die Zentragerade t eines Bündelheeres einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades, dessen Polfläche im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ das t enthaltende gleichseitige Paraboloid ist. Das heißt nichts anderes als:

III. *Der mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} und dem Mittelpunkte C einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 inzidente Strahl jedes einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides ist die Zentragerade desjenigen Polarbündelheeres, das dem gleichseitigen Paraboloide im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades zugeordnet ist. Die im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ den einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloiden bzw. zugeordneten Polarbündelheere gehen durch die von den Antidurchmesserflächen der Kongruenz gebildete Büschelschar.*

Im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ sind je zwei Eckflächen eines Polar-F^2-Tetraeders den beiden übrigen konjugiert [14]). Beiläufig folgt sonach noch aus dem Lehrsatze II:

IV. *Hat im polaren Gebüschverbande $\Pi(F^2)$ aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades ein Polar-F^2-Tetraeder zwei Paraboloide zu Eckflächen, so sind die beiden anderen Eckflächen zwei konzentrische Flächen zweiten Grades.*

B. Die dem gleichseitigen Fokalparaboloide einer linearen Strahlenkongruenz umbeschriebenen gleichseitig parabolischen Ebenengewinde dritter Ordnung.

3. Es seien die Punkte X, Y bzw. die Mittelpunkte zweier einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades X^2, Y^2, ferner ϱ_X, σ_X, τ_X die drei Symmetrieebenen von X^2 sowie ϱ_Y, σ_Y, τ_Y die von Y^2. Die drei Gegenkanten der Ebenen des Ebenendreibeins $\varrho_X\,\sigma_X\,\tau_X$ sind bzw. die Hauptachsen r_X, s_X, t_X von X^2, die der Ebenen des Ebenendreibeins $\varrho_Y\,\sigma_Y\,\tau_Y$ bzw. die Hauptachsen r_Y, σ_Y, τ_Y von Y^2. Wird jede Ebene beider Ebenendreibeine parallel sich selbst nach einem gegebenen Punkte K verschoben, so bestimmen die neuen konzentrischen Ebenendreibeine bekanntlich einen sie umfassenden gleichseitigen Ebenenkegel zweiter Ordnung K^2. In seinem unendlich fernen Strahlenkegelschnitte τ_∞^2 liegen ∞^1 zu den Ebenendreibeinen des gleichseitigen Ebenenkegels perspektive Dreiseite. Durch zwei dieser Dreiseite gehen bzw. die Ebenendreibeine $\varrho_X\,\sigma_X\,\tau_X$, $\varrho_Y\,\sigma_Y\,\tau_Y$. Somit ist das durch die beiden Ebendreibeine gehende und durch sie bestimmte kubische Ebenengewinde τ^3 parabolisch und enthält ∞^1 Ebenendreibeine.

Das parabolische kubische Ebenengewinde τ^3 ist auf die unendlich ferne Ebene abgebildet, sobald als Bild jeder seiner Ebenen deren unendlich ferne Gerade angesehen wird. Jede seiner Biplanaren hat dann ihren unendlich fernen Punkt zum Bilde. Das Bild des Ebenengewindes τ^3 ist der zu ihm perspektive unendlich ferne Strahlenkegelschnitt τ_∞^2, das Bild jedes τ^3 einbeschriebenen Ebenendreibeins ein zu diesem perspektives τ_∞^2 einbeschriebenes unendlich fernes Dreiseit. Die so bestimmten ∞^1 unendlich fernen τ_∞^2 einbeschriebenen Dreiseite sind aber nach obigem perspektiv zu den ∞^1 dem gleichseitigen Ebenenkegel K^2 einbeschriebenen ∞^1 Ebenendreibeinen. Folglich sind diese Dreiseite als Dreiecke einem unendlich fernen Kegelschnitte t_∞^2 einbeschrieben. t_∞^2 ist aber das Bild [15]) einer biquadratischen Regelschar $\mathfrak{T}^4$ mit einer Gerade dreifacher Punkte aus der Biplanarenkongruenz von τ^3. In der Regelschar $\mathfrak{T}^4$ liegen die beiden Haupt-

[14]) Die unter [9]) angeführte Abhandlung, Nr. 3.

[15]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abteilung, erste Aufl., Hannover 1868, S. 98.

achsendreibeine $r_X s_X t_X$, $r_Y s_Y t_Y$. Somit ist die Gerade dreifacher Punkte von $\mathfrak{T}^4$ die Verbindungsgerade der Mittelpunkte X, Y unserer beiden gegebenen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades X^2, Y^2 und als solche der Ort der Mittelpunkte aller ∞^1 auf $\mathfrak{T}^4$ gelegenen durch jene ∞^1 Dreiecke abgebildeten Biplanarendreibeine von τ^3.

Die Ebenen ϱ_X, σ_X, τ_X; ϱ_Y, σ_Y, τ_Y sind bzw. die Symmetrieebenen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades X^2, Y^2 und daher Tangentenebenen[16]) des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Außerdem liegt die unendlich ferne Ebene in τ^3 und berührt C^2. Folglich berühren sieben und somit alle Ebenen[17]) des parabolischen Ebenengewindes τ^3 das gleichseitige Fokalparaboloid C^2. Nun hat jedes Paar zueinander senkrechter Ebenen von C^2 als Schnittgerade je einen Strahl des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades[8]). Daher ergibt sich:

Die Symmetrieebenendreibeine zweier einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades X^2, Y^2 bestimmen ein durch sie gehendes dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 umbeschriebenes parabolisches Ebenengewinde dritter Ordnung τ^3. In τ^3 liegen ∞^1 Ebenendreibeine. Sie erfüllen als Strahlendreibeine eine biquadratische Regelschar $\mathfrak{T}^4$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Die Regelschar $\mathfrak{T}^4$ hat die Verbindungsgerade t *der Mittelpunkte der Flächen X^2, Y^2 zur Gerade dreifacher Punkte. Dem unendlich fernen zur Regelschar $\mathfrak{T}^4$ perspektiven Kegelschnitte $\mathfrak{t}_\infty^2$ sind die unendlich fernen Dreiecke aller auf $\mathfrak{T}^4$ gelegenen Strahlendreibeine einbeschrieben, ihre Seiten liegen in dem unendlich fernen zum Ebenengewinde τ^3 perspektiven Strahlenkegelschnitte τ_∞^2.*

Als Ort der Biplanarendreibeine des Ebenengewindes τ^3 heiße die biquadratische Regelschar $\mathfrak{T}^4$ dessen „Dreibeinregelschar". Die Gerade dreifacher Punkte auf $\mathfrak{T}^4$ heiße die „Zentragerade" von τ^3.

Alle Punkte der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 strahlen die gleichseitigen Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aus[8]), und alle ∞^1 einem solchen Kegel einbeschriebenen Strahlendreibeine sind bzw. die Hauptachsendreibeine ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. Hiernach ist jedes der ∞^1 auf der biquadratischen Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ gelegenen Strahlendreibeine bzw. auch ein Hauptachsendreibein einer solchen Fläche. Ihre Gesamtheit erschöpft, wie sich in Nummer **14** zeigen wird, die Hauptachsendreibeine aller Elemente der unsere beiden Flächen X^2, Y^2 verbindenden Büschelschar von Flächen zweiten Grades.

Auf das parabolische kubische Ebenengewinde τ^3 mit ∞^1 Biplanarendreibeinen ist man schon früher gestoßen[18]). Die τ^3 bestimmende Eigenschaft ∞^1 Biplanarendreibeine zu enthalten stellt dieses kubische Ebenengewinde den gleichseitigen Strahlen- und Ebenenkegeln zweiter Ordnung und den gleichseitigen Hyperboloiden zur Seite. Ich nenne das kubische Ebenengewinde τ^3 mit ∞^1 Biplanarendreibeinen auch „gleichseitig" und die Gerade t als Ort der Mittelpunkte aller ∞^1 Biplanarendreibeine seine „Zentragerade".

Die Fluchtebene γ des geschart involulorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1, d. h. der Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades, ist zugleich der Ort der Zentrageraden

[16]) A. a. O., vierte Aufl., Stuttgart 1907, S. 289, Nr. 120.

[17]) A. a. O., dritte Abteilung, vierte Aufl., Stuttgart 1910, S. 36.

[18]) Böklen, Ueber die cubische Parabel mit Directrix, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **29** (1884), S. 378.

aller dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 der Kongruenz umbeschriebenen gleichseitig parabolischen kubischen Ebenengewinde.

C. Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades.

4. In dem Durchmesserbündel einer gegebenen Fläche zweiten Grades X^2 mit einem eigentlichen Mittelpunkte X bestimmt jeder Durchmesser einen zu ihm normalen konjugierten Durchmesser und der Durchmesserbüschel einer Durchmesserebene δ einen[19]) zu ihm projektiven aus den zu den Durchmessern von δ bzw. normalen konjugierten Durchmessern bestehenden Strahlenkegel zweiter Ordnung K_δ^2. Ich bezeichne hier den zu der Durchmesserebene δ gehörigen Durchmesserkegel zweiter Ordnung K_δ^2 als den zu ihr gehörigen „Hauptkegel" der Fläche X^2. Die je zu den Durchmesserebenen von X^2 gehörigen Hauptkegel gehen durch das Hauptachsendreibein von X^2 und sind somit gleichseitig.

5. In dieser und der folgenden Nummer bestimme ich mittels der zu den Durchmesserebenen einer Fläche zweiten Grades mit eigentlichem Mittelpunkte gehörigen Hauptkegel die Hauptachsendreibeine der Flächen einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte.

Ein eigentlicher Punkt E auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 sei gegeben und die Büschelschar[20]) konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit dem gemeinsamen Mittelpunkte E. Der mit E inzidente Kongruenzstrahl e und der unendlich ferne c_∞ sind reziprok polar für alle Flächen dieser Büschelschar. Folglich ist für alle auch ihr gemeinsamer Durchmesser e und ihre gemeinsame Durchmesserebene γ konjugiert. Und da bekanntlich die von jedem Kongruenzstrahle — also auch von c_∞ — im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} getragene Punktinvolution aus Paaren konjugierter Punkte für alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades besteht, so rufen die Flächen unserer Büschelschar in der Fluchtebene γ dieselbe Involution konjugierter Durchmesser und im unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ dieselbe Involution konjugierter Durchmesserebenen hervor. Jedem in γ gelegenen gemeinsamen Durchmesser d_γ der Büschelschar ist sonach für alle ihre Flächen je derselbe zu d_γ normale Durchmesser d_{γ_n} konjugiert. Die Gesamtheit dieser Durchmesser d_{γ_n} bildet für alle Flächen der Büschelschar denselben zu γ gehörigen Hauptkegel K_γ^2. Der Hauptkegel K_γ^2 enthält (**4.**) das Hauptachsendreibein jeder Fläche der Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit dem gemeinsamen Mittelpunkte E. Er ist somit identisch mit dem von E ausstrahlenden Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Kurz:

Zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gehört für jede Fläche einer Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit dem eigentlichen Mittelpunkte E derselbe Hauptkegel K_γ^2. Er ist die „Hauptachsenfläche" dieser Büschelschar. Der Hauptkegel K_γ^2 und der vom Punkte E ausstrahlende Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades sind identisch. Jedem mit γ inzidenten gemeinsamen

---

[19]) Die unter [15]) angeführte zweite Abteilung von Reyes Geometrie der Lage, S. 42.

[20]) Die in [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 20.

Durchmesser d_γ der Büschelscharflächen ist für jede von ihnen je derselbe zu d_γ normale Durchmesser d_{γ_n} auf dem Kegel K_γ^2 konjugiert.

Zwischen dem Strahlenbüschel erster Ordnung $(E\gamma)$ und dem so auf ihn bezogenen Strahlenkegel zweiter Ordnung K_γ^2 besteht eine Projektivität.

Zwei zueinander normale Durchmesser einer Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades, von denen jeder für alle Büschelscharflächen dem andern konjugiert ist, seien zueinander normale konjugierte Durchmesser „für die Büschelschar" selbst genannt.

Jede Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E geht[20]) durch das zerfallene einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade. Das vom gemeinsamen Mittelpunkte E ausstrahlende Hauptachsendreibein des zerfallenen Rotationsparaboloides wird gebildet von der Normale der Fluchtebene γ von Σ_{ig} im Punkte E und von den beiden mit E inzidenten Parallelen zu den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ von C_1^1. Eine Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit eigentlichem Mittelpunkte besteht — abgesehen vom einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloide mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade — aus lauter Hyperboloiden.

6. In vorstehenden Nummern haben wir die der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 zugehörigen Hauptkegel K_γ^2 für die Elemente einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E bestimmt. Die Kegel erwiesen sich als identisch mit dem vom gemeinsamen Flächenmittelpunkte E ausstrahlenden Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. In dieser Nummer beschäftigen wir uns mit den Hauptkegeln jener Flächen, die einer von γ verschiedenen gemeinsamen Durchmesserebene δ der Büschelschar zugehören. Jedes Element der Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades ordnet der Durchmesserebene δ einen andern ihr konjugierten Durchmesser zu und sendet in sie eine andere Durchmesserinvolution. Die der gemeinsamen Durchmesserebene δ für die Büschelscharflächen zugehörigen Hauptkegel K_δ^2 sind hiernach verschieden (**4.**). Sie gehen aber alle durch die Normale n_δ von δ im Punkte E und durch den Durchmesser $d_{\gamma\delta}$, der zu dem Durchmesser γd normal und ihm für die Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiten Grades mit dem Mittelpunkte E konjugiert ist (**5.**).

Die Hauptachsendreibeine der Flächen einer Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit dem Mittelpunkte E liegen nun (**4.**) auf dem von E ausstrahlenden Kegel K_γ^2 des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2, ihre Symmetrieebenendreibeine in dem[16]) von E aus dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 umbeschriebenen Ebenenkegel zweiter Ordnung E_E^2. Greifen wir zwei der Hauptkegel K_δ^2 heraus, so hat der sie verbindende Kegelbüschel nach obigem zu einem Basisstrahle den dem Durchmesser $\gamma\delta$ für die Büschelschar konjugierten und zu ihm normalen Strahl $d_{\gamma\delta}$ von K_γ^2. Ferner sind die zwei herausgegriffenen Hauptkegel K_δ^2, als der Durchmesserebene δ zugehörig, bzw. zwei K_γ^2 einbeschriebenen Hauptachsendreibeinen umbeschrieben, die als Symmetrieebenendreibeine der betreffenden Büschelscharflächen im Ebenenkegel zweiter Ordnung E_E^2 liegen. Folglich schneiden nach einem bekannten Satze alle Kegel des Kegelbüschels den Kegel K_γ^2 außer in dem ihnen gemeinsamen Strahle $d_{\gamma\delta}$ noch in Strahlentripeln, die ihre Ebenen in den Ebenenkegel E_E^2 senden. Strahlentripel von K_γ^2, deren Seitenflächen Ebenentripel von E_E^2 bilden, sind

aber allein die Hauptachsendreibeine der konzentrischen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit dem Mittelpunkte E. Demnach schneiden die Kegel des die beiden herausgegriffenen Hauptkegel K_δ^2 verbindenden Kegelbüschels den Kegel K_γ^2 außer in dem ihnen allen gemeinsamen Durchmesser $d_{\gamma\delta}$ noch je in den Hauptachsendreibeinen derjenigen Flächen zweiten Grades, aus denen die Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit dem Mittelpunkte E besteht. Aber die beiden zur Bestimmung des Kegelbüschels verwandten Kegel K_δ^2 gehen, wie alle δ zugehörigen Hauptkegel, nicht nur durch den Strahl $d_{\gamma\delta}$ sondern auch durch die Normale n_δ der Durchmesserebene δ in E. Jeder Kegel des Kegelbüschels trifft somit je einen der ∞^1 Hauptkegel K_δ^2 außer in dem Haupttripel einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiten Grades mit dem Mittelpunkte E noch in den beiden Strahlen $d_{\gamma\delta}$ und n_δ, also in fünf Strahlen, und fällt somit mit ihm zusammen, D. h.:

I. *Ist die Durchmesserebene δ einer Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E verschieden von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes $\Sigma_{i\vartheta}$ von C_1^1, so bilden die für die Durchmesserebene δ den Büschelscharflächen zugehörigen Hauptkegel K_δ^2 einen Büschel. Zwei Basisstrahlen dieses Kegelbüschels sind stets reell. Der eine ist die durch den Büschelscharmittelpunkt E gehende Normale n_δ von δ, der andere der zu dem Durchmesser $\gamma\delta$ normale und ihm für die Büschelschar konjugierte Durchmesser $d_{\gamma\delta}$.*

Unsere Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades mit dem Mittelpunkte E geht wie alle Büschelscharen konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades durch das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade[20]). Das vom Punkte E ausstrahlende Hauptachsendreibein dieser merkwürdigen Fläche besteht aus den mit E inzidenten Parallelen zu den drei Symmetrieachsen von C_1^1. In dem Büschel der Hauptkegel K_δ^2 verbindet somit der für δ dem einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloide zugehörige Hauptkegel K_δ^2 dieses von E ausstrahlende Hauptachsendreibein mit den zwei Basisstrahlen $d_{\gamma\delta}$ und n_δ des Kegelbüschels. Und diese fünf Strahlen genügen zu seiner Bestimmung.

Es gibt noch einen zweiten leicht zu konstruierenden zu δ gehörigen Hauptkegel K_δ^2. Er ist bestimmt durch die in unserer Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades gelegene zerfallene Fläche mit dem durch E gehenden Kongruenzstrahle e als Doppelpunktsgerade. Das Hauptachsendreibein dieser zerfallenen Fläche besteht nämlich aus den beiden mit E inzidenten zu e senkrechten Geraden in den beiden mit e inzidenten Achsenebenen von C_1^1. Und der gesuchte Hauptkegel K_δ^2 verbindet wiederum das gewonnene Hauptachsendreibein mit den zwei Basisstrahlen $d_{\gamma\delta}$ und n_δ des Kegelbüschels der Hauptkegel K_δ^2.

Mit den beiden soeben konstruierten Hauptkegeln K_δ^2 ist der durch sie gehende Büschel der zu δ gehörigen Hauptkegel K_δ^2 der Elemente unserer Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit dem gemeinsamen Mittelpunkte E bestimmt.

In der dem Durchmesser $\gamma\delta$ für alle Flächen der gegebenen Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades konjugierten Durchmesserebene $\xi_{\gamma\delta}$ bilden die der Durchmesserebene δ für die Büschelscharflächen konjugierten Durchmesser einen zur Büschelschar projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung $(E\xi_{\gamma\delta})$. Jeder Strahl von $(E\xi_{\gamma\delta})$ liegt zusammen mit dem in der Ebene $\xi_{\gamma\delta}$ enthaltenen Durchmesser $d_{\gamma\delta}$ auf demjenigen Hauptkegel K_δ^2, für dessen ihn bestimmende Büschelscharfläche der Strahl und δ konjugiert sind. Durch den Durchmesserbüschel $(E\xi_{\gamma\delta})$ ist aber der zu ihm per-

spektive Büschel der Hauptkegel K_δ^2 auf unsere zu diesem Durchmesserbüschel projektive Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades projektiv bezogen. Ferner ist der Basisstrahl des Büschels der Hauptkegel K_δ^2 ein Strahl des vom Punkte E ausstrahlenden Kegels des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Folglich ist dargetan:

II. *Der Büschel aus den einer gegebenen Durchmesserebene δ zugehörigen Hauptkegeln K_δ^2 der Elemente einer Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E ist zur Büschelschar projektiv. Allen Hauptkegeln entsprechen die sie bestimmenden Büschelscharflächen. Jeder Hauptkegel K_δ^2 schneidet den vom Mittelpunkte E ausstrahlenden Kegel K_γ^2 des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades außer in dem Hauptachsendreibeine der ihm entsprechenden Büschelscharfläche noch* (**I.**) *in dem einen $d_{\gamma\delta}$ der beiden stets reellen Basisstrahlen $d_{\gamma\delta}$ und n_δ des Büschels der Hauptkegel K_δ^2.*

7. Wiederum sei δ bei einer Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E eine von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes $\Sigma_{i\gamma}$ von C_1^1 verschiedene beliebig herausgegriffene Durchmesserebene. Dann ist auch der Durchmesser $\gamma\delta$ ein beliebig herausgegriffener Strahl des vom Mittelpunkte E ausgehenden Strahlenbüschels erster Ordnung $(E\gamma)$. Durchläuft der Durchmesser $\gamma\delta$ den Strahlenbüschel $(E\gamma)$, so durchläuft der zu ihm normale für die Büschelschar konjugierte Durchmesser $d_{\gamma\delta}$ den zu diesem Strahlenbüschel projektiven von E ausstrahlenden Kegel $K_{\gamma E}^2$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades (**5.**). Nun sei in γ zum Durchmesser $\gamma\delta$ die Spur t derjenigen Ebene ε_t gewählt, die durch den mit E inzidenten Kongruenzstrahl e geht und den e enthaltenden Parallelstrahlenbüschel von Γ^2 trägt [21]). Dann liegt in der in e zu t senkrechten Ebene die Normale n_δ von δ in E und der zu t normale für die Büschelschar konjugierte Strahl $d_{\gamma\delta}$. Als Kongruenzstrahl [22]) ist aber e ein Strahl von Γ^2 und als solcher ein Strahl des Kegels $K_{\gamma E}^2$. Aber auch n_δ ist ein Strahl dieses Kegels. Folglich fällt der Kongruenzstrahl e mit dem zu t normalen für die Büschelschar konjugierten Strahle $d_{\gamma\delta}$ zusammen. D. h.:

Geht der Strahl e einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bei einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E durch E, und ist ε_t die Ebene des durch e gehenden Parallelstrahlenbüschels aus dem Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades und t *die Spur von ε_t in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes $\Sigma_{i\gamma}$ von C_1^1, so sind die zueinander normalen Strahlen* t, e *für die Büschelschar konjugiert. Zu einer gegebenen mit* t *inzidenten Durchmesserebene δ der Büschelschar gehört für die zerfallene Büschelscharfläche mit der Doppelpunktsgerade e ein Hauptkegel K_δ^2, der den vom Büschelscharmittelpunkte E ausstrahlenden Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 längs e berührt.*

8. In **6.** schnitten wir bei einer Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einem eigentlichen Mittelpunkte E die Hauptachsendreibeine der Büschelscharflächen aus dem von E ausstrahlenden Kegel K_γ^2 des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades durch einen zur Büschelschar projektiven Büschel der einer Durchmesserebene δ zugehörigen Hauptkegel K_δ^2 der Büschelscharflächen.

---

[21]) A. a. O., Nr. 24.

[22]) Jolles, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Ann. **63** (1907), Nr. 11.

Diese Konstruktion der Hauptachsendreibeine der Flächen einer solchen Büschelschar versagt, sowie E ein uneigentlicher Punkt wird, d. h. E mit einem Punkte E_∞ auf dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ zusammenfällt. Kurz, eine Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide mit dem unendlich fernen Mittelpunkte E_∞ vorliegt. Der von E_∞ ausstrahlende Kegel K_γ^2 des Hauptachsenkomplexes Γ^2 ist dann zerfallen [23]) in den unendlich fernen Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Mittelpunkte E_∞ und den aus E_∞ ausstrahlenden Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty\, \varepsilon_{E_\infty})$ in der E_∞ durch den Komplex Γ^2 zugeordneten Ebene ε_{E_∞}. Die Büschelschar konzentrischer Paraboloide mit dem Mittelpunkte E_∞ geht durch das in C_1^1 einscharig enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit c_∞ als Doppelpunktsgerade. Alle Büschelscharparaboloide berühren einander [1]) längs c_∞ sowie die unendlich ferne Ebene in E_∞ und die Ebene ε_{E_∞} in dem E_∞ für den unendlich fernen imaginären Kugelkreis konjugierten Punkt E_∞^i von c_∞.

In der dem Punkte E_∞ durch den Hauptachsenkomplex Γ^2 zugeordneten Ebene ε_{E_∞} schneiden einander die Strahlen der beiden für den unendlich fernen imaginären Kugelkreis konjugierten Punkte E_∞ und E_∞^i von c_∞ wechselweise rechtwinklig. Somit sendet jedes nicht zerfallene Paraboloid aus der Büschelschar konzentrischer Paraboloide mit dem Mittelpunkte E_∞ seine eigentliche Hauptachse in den Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty\, \varepsilon_{E_\infty})$ und seinen nicht in C_1^1 enthaltenen Scheitelstrahl in den Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty^i\, \varepsilon_{E_\infty})$. Der Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty^i\, \varepsilon_{E_\infty})$ ist aber perspektiv zur Büschelschar konzentrischer Paraboloide, wenn jedem seiner Strahlen das ihn enthaltende Büschelscharparaboloid zugeordnet wird. Also folgt:

I. *Hat eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide den gemeinsamen Mittelpunkt E_∞, ist ferner E_∞^i auf dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ dem Punkt E_∞ für den unendlich fernen imaginären Kugelkreis konjugiert, und ist durch den Hauptachsenkomplex Γ^2 der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades dem Punkte E_∞ die Ebene ε_{E_∞} zugeordnet, so erfüllen die nicht in C_1^1 gelegenen Scheitelstrahlen der Büschelscharparaboloide samt c_∞ den zur Büschelschar perspektiven Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty^i\, \varepsilon_{E_\infty})$.*

Die in jedem Strahle des Parallelstrahlenbüschels $(E_\infty^i\, \varepsilon_{E_\infty})$ zur Ebene ε_{E_∞} senkrechte Ebene ist die Scheitelebene des durch den Strahl gehenden Paraboloides unserer Büschelschar konzentrischer Paraboloide. Demnach ergibt sich als unmittelbare Folge vorstehenden Lehrsatzes:

II. *Die Scheitelebenen einer Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloide bilden einen zur Büschelschar projektiven Büschel paralleler Ebenen.*

Die Scheitelebene σ eines aus der Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide herausgegriffenen Paraboloides geht durch den mit dem einen Scheitelstrahle dieser Fläche zusammengefallenen Kongruenzstrahl s. Beschreibt die Ebene σ den zur Büschelschar konzentrischer Paraboloide projektiven Büschel der Scheitelebenen aller dieser Flächen, so beschreibt der mit ihr inzidente Scheitelstrahl s eine in C_1^1 gelegene zu diesem Büschel paralleler Ebenen perspektive paraboloidische Regelschar $\mathfrak{S}^2$. Die Scheitelebene σ bleibt dabei senkrecht zu derjenigen zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 parallelen Ebene ε_{E_∞}, die dem Mittelpunkte E_∞ der konzentrischen Paraboloide durch den Hauptachsenkomplex Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades zugeordnet ist [21]). Von dem mit

[23]) Die in [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 21.

dem Kongruenzstrahle s zusammengefallenen Scheitelstrahle wird sonach eine durch die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 gehende paraboloidische Regelschar beschrieben. D. h. die paraboloidische Regelschar $\mathfrak{S}^2$ ist gleichseitig. Oder:

III. *Beschreibt ein Paraboloid eine Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloide, so beschreibt sein in C_1^1 enthaltener Scheitelstrahl s eine zur Büschelschar perspektive gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{S}^2$.*

In der dem Mittelpunkte E_∞ der Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide durch den Hauptachsenkomplex Γ^2 zugeordneten Ebene ε_{E_∞} bilden nach Lehrsatz **I** die nicht in C_1^1 enthaltenen Scheitelstrahlen der Paraboloide einen zur Büschelschar projektiven Parallelstrahlenbüschel und nach Lehrsatz **III** deren in C_1^1 enthaltene Scheitelstrahlen s eine zur Büschelschar projektive gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{S}^2$. Die Regelschar $\mathfrak{S}^2$ sendet — wie jede einscharig in C_1^1 enthaltene paraboloidische Regelschar — einen Leitstrahl $\mathfrak{f}$ in die mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ inzidente Ebene ε_{E_∞}. Folglich ist jeder Punkt auf $\mathfrak{f}$ ein Scheitelpunkt je einer Fläche der Büschelschar konzentrischer Paraboloide und die Gesamtheit dieser Scheitelpunkte eine von $\mathfrak{f}$ getragene zur Büschelschar projektive Punktreihe. Die eigentlichen Hauptachsen unserer konzentrischen Paraboloide bilden aber, wie in dem Beweise zum Lehrsatze **I** hervorgehoben, zusammen mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ den Parallelstrahlenbüschel $(E\,\varepsilon_{E_\infty})$. Ferner geht die gleichseitig paraboloidische Regelschar $\mathfrak{S}^2$ von C_1^1 durch die Hauptsymmetrieachse c_d der linearen Kongruenz. Somit sind wir zu dem Lehrsatze gelangt:

IV. *Die Scheitelpunkte einer Büschelschar konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloide bilden eine zur Büschelschar projektive Punktreihe erster Ordnung. Ihr Träger ist sowohl inzident mit der Ebene ε_{E_∞}, die dem Mittelpunkte E_∞ der Paraboloide durch den Hauptachsenkomplex Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades zugeordnet ist, wie auch mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Der von dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ und den eigentlichen Hauptachsen aller Paraboloide der Büschelschar gebildete Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty\,\varepsilon_{E_\infty})$ ist zu der von den Scheitelpunkten dieser Paraboloide gebildeten Punktreihe erster Ordnung projektiv.*

Es sei P^2 ein Paraboloid aus der Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide mit dem Mittelpunkte E_∞. Seine eigentliche Hauptachse $\mathfrak{a}$ sendet es in die E_∞ durch den Hauptachsenkomplex Γ^2 zugeordnete Ebene ε_∞, seine beiden uneigentlichen Scheitelstrahlen in die unendlich ferne Ebene. Der eine ist der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞, der andere ein unendlich ferner mit E_∞ inzidenter Strahl $\mathfrak{p}_\infty$. Die beiden mit der eigentlichen Hauptachse $\mathfrak{a}$ inzidenten Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 sind [16]) die beiden eigentlichen Symmetrieebenen von P^2. Sie schneiden die unendlich ferne Ebene in den die Winkel der beiden uneigentlichen Scheitelstrahlen c_∞, $\mathfrak{p}_\infty$ hälftenden uneigentlichen Hauptachsen dieser Fläche. Durchläuft P^2 unsere Büschelschar konzentrischer Paraboloide mit dem Mittelpunkte E_∞ und seine eigentliche Hauptachse $\mathfrak{a}$ nach dem Lehrsatze **IV** den zu dieser Büschelschar projektiven Parallelstrahlenbüschel $(E_\infty\,\varepsilon_{E_\infty})$, so durchläuft in der unendlich fernen Ebene das Paar uneigentlicher Hauptachsen von P^2 den zur Büschelschar projektiven orthogonalen Strahlenbüschel E_∞. Mit dem in dieser Nummer bewiesenen beherrschen wir also die in **6.** ausgeschlossene Theorie der Hauptachsendreibeine aller Flächen in den Büschelscharen konzentrischer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Paraboloide.

D. Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade.

9. Wir wenden uns nunmehr in den Nummern **9** bis **15** zur Bestimmung des Ortes der Hauptachsendreibeine aller Flächen aus einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade oder kurz zur Bestimmung der „Hauptachsenfläche" der Büschelschar. Hierzu treffen wir folgende auch für die Theorie der Strahlenkomplexe fruchtbringende Festsetzung:

Ist ein Büschel ebener Kurven n-ter Ordnung zu einer nicht in seiner Ebene gelegenen Punktreihe erster Ordnung t projektiv und strahlt aus jedem Punkte von t ein Kegel, der die diesem Punkte entsprechende Kurve projiziert, so heiße [24]) die Gesamtheit dieser Kegel eine „Reihe von Strahlenkegeln n-ter Ordnung mit der Zentragerade t".

Aus je vier harmonischen Punkten der Zentragerade t strahlen vier „harmonische" Kegel der Kegelreihe. Sie projizieren vier harmonische Kurven des Kurvenbüschels. Vermittels ihrer harmonischen Kegelwürfe lassen sich die Kegelreihen projektiv auf die Grundgebilde erster Stufe beziehen. Sie sind demnach in den Projektivitätsbereich der Grundgebilde erster Stufe einzureihen.

Jede Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t besteht aus Flächen zweiten Grades mit je einem Punkte E von t als Mittelpunkt (**1.**). Der von jedem Punkte E von t ausstrahlende Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades ist der zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 gehörige Hauptkegel $K_{\gamma E}^2$ für (**5.**) alle solche Flächen zweiten Grades mit dem gemeinsamen Mittelpunkte E. Folglich kann die Reihe der von den Punkten E von t ausstrahlenden Kegel $K_{\gamma E}^2$ von Γ^2 angesehen werden als die Reihe der zu γ gehörigen Hauptkegel der Flächen jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der gemeinsamen Zentragerade t.

Wir geben eine solche Büschelschar mit einer eigentlichen Zentragerade t und bestimmen die Beziehung zwischen der Büschelschar und der Reihe der durch die Büschelscharflächen bestimmten zur Fluchtebene γ gehörigen Hauptkegel $K_{\gamma E}^2$.

Durch t geht die Ebene ε_t eines Parallelstrahlenbüschels [21]) von Γ^2. Auf jedem aus den Punkten E von t strahlenden Komplexkegel $K_{\gamma E}^2$ liegt ein Strahl e dieses Parallelstrahlenbüschels, außerdem die im Mittelpunkte E des Kegels auf γ errichtete Senkrechte $n_{\gamma E}$ und jede der beiden mit E inzidenten zu den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 parallelen Geraden [20]). Da der in der Ebene ε_t gelegene Parallelstrahlenbüschel von Γ^2 den mit ihr inzidenten Kongruenzstrahl e enthält [8]), so gehen die unendlich fernen Kegelschnitte $k_{\gamma E}^2$ der von den Punkten E von t ausstrahlenden Kegel $K_{\gamma E}^2$ erstens durch den unendlich fernen Punkt E'_∞ von e, zweitens durch den mit dem unendlich fernen Punkt C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 zusammengefallenen unendlich fernen Punkt aller Normalen von γ und endlich durch die beiden unendlich fernen Punkte $\mathfrak{C}_1^\infty$, $\mathfrak{C}_2^\infty$ der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz. Die unendlich fernen Kegelschnitte $k_{\gamma E}^2$ der von den Punkten E von t ausstrahlenden Kegel $K_{\gamma E}^2$ bilden hiernach einen Kegelschnittbüschel mit den vier Basispunkten E'_∞, C'_∞, $\mathfrak{C}_1^\infty$, $\mathfrak{C}_2^\infty$.

In den Gegenseiten $C'_\infty\,\mathfrak{C}_1^\infty$, $E'_\infty\,\mathfrak{C}_2^\infty$ und $C'_\infty\,\mathfrak{C}_2^\infty$, $E'_\infty\,\mathfrak{C}_1^\infty$ des Basisvierseits unseres Kegelschnittbüschels schneidet die unendlich ferne Ebene die bzw. von den Schnitt-

[24]) Jolles, Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte Kurve, Math. Zeitschr. **2** (1918), Nr. 10.

punkten von t mit den beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_1$ ausstrahlenden zerfallenen Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2. Die Gegenseiten $\mathfrak{C}_1^\infty \mathfrak{C}_2^\infty$, $C'_\infty E'_\infty$, von denen $\mathfrak{C}_1^\infty \mathfrak{C}_2^\infty$ der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞ ist, bilden folglich den Schnittkegelschnitt der unendlich fernen Ebene mit dem vom unendlich fernen Punkte $\mathfrak{T}_\infty$ von t ausstrahlenden Kegel von Γ^2. Der Kegel ist zerfallen [23]) und besteht aus dem unendlich fernen Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{T}_\infty$ und einem von diesem Punkte ausstrahlenden Parallelenstrahlbüschel in der durch c_∞ gehenden $\mathfrak{T}_\infty$ durch Γ^2 zugeordneten Ebene.

Auf den von den Punkten E von t ausstrahlenden Kegeln $K^2_{\gamma E}$ von Γ^2 liegen [8]) die mit diesen Punkten bzw. inzidenten eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ bildenden Strahlen von C_1^1. Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ hat außer t die t im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 zugeordnete unendlich ferne Gerade t'_∞ zur Leitgerade, und ihre Strahlen beziehen die Punktreihen auf t, t'_∞ projektiv aufeinander. In $\mathfrak{R}^2$ liegt der mit der Ebene ε_t des Büschels paralleler Strahlen $\mathfrak{e}$ von Γ^2 inzidente Kongruenzstrahl e. Folglich geht t'_∞ durch den unendlich fernen Punkt E'_∞ von e, d. h. durch einen Basispunkt des Büschels der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$. Der somit zur Punktreihe auf t'_∞ perspektive Büschel der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ ist hiernach durch die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ projektiv auf die Punktreihe $t(E \ldots)$ bezogen, die von den Mittelpunkten E der die Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ projizierenden Kegel $K^2_{\gamma E}$ gebildet wird. Zusammengefaßt:

Durchläuft eine Fläche F^2_E nacheinander alle ∞^2 Büschelscharen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer gemeinsamen eigentlichen Zentragerade t, *so bestimmt sie jedesmal dieselbe Reihe zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 gehöriger Hauptkegel $K^2_{\gamma E}$. Und zwar besteht diese Kegelreihe aus den von den Punkten von* t *ausstrahlenden Kegeln $K^2_{\gamma E}$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Den zur Kegelreihe perspektiven Kegelschnittbüschel bilden die unendlich fernen Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ der Kegel $K^2_{\gamma E}$. Seine vier Basispunkte sind die drei unendlich fernen Punkte $\mathfrak{C}_1^\infty$, $\mathfrak{C}_2^\infty$, C'_∞ der drei Symmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, c_d von C_1^1 und der unendlich ferne Punkt E'_∞ aller mit* t *inzidenten parallelen Strahlen* $\mathfrak{e}$ *von Γ^2. Jede der ∞^2 Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades F^2_E mit der gemeinsamen Zentragerade* t *ist projektiv zur Kegelreihe der von den Punkten von* t *ausstrahlenden Kegel $K^2_{\gamma E}$ von Γ^2, wenn in jeder Büschelschar den Flächen F^2_E die von ihren Mittelpunkten E ausstrahlenden Kegel $K^2_{\gamma E}$ zugewiesen werden.*

10. Die Untersuchung der zu einer gegebenen Durchmesserebene δ gehörigen Hauptkegel der Elemente einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t gestaltet sich schwierig. Hier sei zunächst eine für diese Untersuchung wichtige Eigenschaft der mit t inzidenten parallelen Strahlen des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades abgeleitet.

Jeder Punkt E einer eigentlichen Gerade t auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist der Mittelpunkt einer Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades [1]). Der Gerade t ist als Durchmesser dieser Büschelschar für diese ein zu ihr normaler Durchmesser $\mathfrak{t}_n$ konjugiert (**5.**). Er liegt auf dem vom Punkte E ausstrahlenden Kegel $K^2_{\gamma E}$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades.

Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einem auf t gelegenen Mittelpunkte bilden ein Bündelheer (**1.**). Somit sendet eine aus diesem Bündelheere

herausgegriffene Büschelschar mit der Zentragerade t je eine Fläche in jede Büschelschar konzentrischer einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit je einem Mittelpunkte E auf t. Jede Fläche aus einer solchen Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades ordnet der Gerade t denselben ihr für die Büschelschar konjugierten und zu ihr normalen Durchmesser t_n zu. Also genügen die Flächen der herausgegriffenen Büschelschar mit der Zentragerade t zur Bestimmung des Ortes der durch die Büschelscharen konzentrischer Flächen unseres Bündelheeres dem Strahle t zugeordneten Strahlen t_n.

Es habe in dieser Büschelschar mit der Zentragerade t die Fläche F_E^2 den Punkt E auf t zum Mittelpunkte. Der zu t als Durchmesser für F_E^2 konjugierte und zu t normale Durchmesser t_n liegt nun sowohl in der Normalebene ν_E von t im Punkte E wie auch in der t für F_E^2 konjugierten Durchmesserebene, d. h. in der Polarebene τ_E des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{T}_\infty$ von t für diese Fläche. Beschreibt E die Punktreihe t und dabei F_E^2 die Büschelschar, so beschreibt ν_E den zur Punktreihe t $(E\ldots)$ perspektiven Parallelebenenbüschel zu t normaler Ebenen und τ_E einen zu unserer Büschelschar projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung. Die Büschelschar ist aber projektiv zur Punktreihe t$(E\ldots)$ der Mittelpunkte ihrer Flächen und die unendlich ferne Ebene die Polarebene vom Punkte $\mathfrak{T}_\infty$ für das Paraboloid der Büschelschar. Folglich ist der von den Ebenen τ_E beschriebene Büschel erster Ordnung ein zur Punktreihe t $(E\ldots)$ projektiver Büschel paralleler Ebenen. Die beiden Büschel paralleler Ebenen ν_E und τ_E sind durch die zu ihnen perspektive Punktreihe t$(E\ldots)$ projektiv aufeinander bezogen und haben die unendlich ferne Ebene zur Deckebene. Ihr Erzeugnis — der Ort der Strahlen t_n — ist somit ein zur herausgegriffenen Büschelschar mit der Zentragerade t projektiver und zur Punktreihe t$(E\ldots)$ der Mittelpunkte der Büschelscharflächen perspektiver Parallelstrahlenbüschel. Jeder Strahl t^n liegt aber, wie schon hervorgehoben, auf dem von seinem Schnittpunkte E mit t ausstrahlenden Kegel $K_{\gamma E}^2$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2. Also ist der Büschel paralleler Strahlen t_n identisch mit dem Büschel paralleler Strahlen e von Γ^2, dessen Ebene ε_t durch t geht [21]). Damit ist bewiesen:

Wird das Bündelheer der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t *nach den Büschelscharen konzentrischer Flächen zweiten Grades geordnet, deren Mittelpunkte die Punkte E von* t *sind, so bilden die für diese Büschelscharen zu* t *normalen und bzw. für sie konjugierten Durchmesser einen zur Punktreihe* t$(E\ldots)$ *perspektiven Parallelstrahlenbüschel. Er liegt in dem Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades und ist perspektiv zur Reihe der von den Punkten E von* t *ausstrahlenden Komplexkegel $K_{\gamma E}^2$.*

11. Für die Flächen einer Büschelschar von Flächen zweiten Grades F_E^2 bilden die Polaren einer gegebenen Gerade bekanntlich eine zur Büschelschar projektive Regelschar zweiter Ordnung. Liegen die Flächen F_E^2 — was wir jetzt voraussetzen — einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, und hat die Büschelschar eine eigentliche Zentragerade t, so berührt die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{d}_\infty$ einer gegebenen Durchmesserebene δ der Büschelschar das Büschelscharparaboloid im unendlich fernen Punkte $\mathfrak{T}_\infty$ von t. Die Polare $\mathfrak{p}_\infty$ von $\mathfrak{d}_\infty$ für diese Fläche berührt sie ebenfalls in $\mathfrak{T}_\infty$. Demnach hat $\mathfrak{d}_\infty$ für die Flächen der Büschelschar eine paraboloidische Polarenregelschar $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}_\infty}^2$. Nun sind die Polaren von $\mathfrak{d}_\infty$ für die Büschelscharflächen zugleich die Durchmesser $\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}\infty}$, die der gemeinsamen Durchmesserebene δ für diese Flächen bzw. konjugiert sind. Also ist die Zentragerade t ein Leitstrahl der Regelschar $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}_\infty}^2$ und, wie aus dem Beweise hervor-

geht, aller Polarenregelscharen, die durch die Büschelscharflächen bzw. den übrigen gemeinsamen Durchmesserebenen zugeordnet werden. Ein zweiter gemeinsamer Leitstrahl dieser Polarenregelscharen ist der dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{T}_\infty$ für die Büschelschar konjugierte Strahl. Er liegt in der unendlich fernen Ebene als Polarebene von $\mathfrak{T}_\infty$ für das Büschelscharparaboloid. Fällt insbesondere die gemeinsame Durchmesserebene δ mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ij} von C_1^1 zusammen und also $\mathfrak{d}_\infty$ auf den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞, so werden die Polaren von $\mathfrak{d}_\infty$ für die Büschelscharflächen die mit t inzidenten Kongruenzstrahlen [25]). Der dem Punkte $\mathfrak{T}_\infty$ für die Büschelschar konjugierte Strahl erweist sich folglich als der unendlich ferne Leitstrahl der in C_1^1 enthaltenen paraboloidischen Regelschar $\mathfrak{R}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$, in deren Leitschar $\mathfrak{L}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$ auch der Strahl t liegt. Jener Strahl ist somit der t im geschart involutorischen Raume Σ_{ij} zugeordnete Strahl t'_∞. Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der F^2-Büschel sind endlich den Punkten X_∞ auf der unendlich fernen Gerade $\mathfrak{d}_\infty$ von δ für unsere Büschelschar bzw. die Leitstrahlen der Polarenregelschar $\mathfrak{R}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$ konjugiert. Außerdem sind die Polarebenen der unendlich fernen Punkte für eine Fläche zweiten Grades deren Durchmesserebenen. Sonach ist gezeigt:

Bei einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t *bilden die für die Büschelscharflächen einer gemeinsamen Durchmesserebene δ konjugierten Durchmesser $\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_\infty}$ eine zur Büschelschar projektive paraboloidische Regelschar $\mathfrak{R}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$. Die Zentragerade* t *und die ihr im geschart involutorischen Raume Σ_{ij} von C_1^1 zugeordnete unendlich ferne Gerade t'_∞ sind Leitstrahlen dieser Regelschar. Beschreibt der Punkt X_∞ die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{d}_\infty$ von δ, so beschreibt die ihm für die Büschelschar konjugierte Gerade $\mathfrak{x}$ die zur Punktreihe $\mathfrak{d}_\infty(X_\infty \ldots)$ projektive Leitschar $\mathfrak{L}^2_{\mathfrak{d}_\infty}(\mathfrak{x} \ldots)$ von $\mathfrak{R}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$. Dabei bilden für jede Lage des Punktes X_∞ seine Polarebenen für die Flächen der Büschelschar um die je dem Punkte X_∞ für die Büschelschar konjugierte Gerade $\mathfrak{x}$ einen zur Punktreihe* t$(E \ldots)$ *der Flächenmittelpunkte perspektiven Büschel erster Ordnung von Durchmesserebenen.*

Auch dieser Lehrsatz wird uns in der folgenden Nummer bei der Untersuchung der zur gemeinsamen Durchmesserebene δ gehörigen Hauptkegel $K^2_{\delta E}$ aller Flächen unserer Büschelschar von Nutzen sein.

12. Gegeben sei eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t und eine ihnen gemeinsame von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ij} von C_1^1 verschiedene Durchmesserebene δ. Aus der Büschelschar sei eine Fläche F^2_E mit dem Mittelpunkte E herausgegriffen. $\mathfrak{c}_{\delta E}$ sei der δ für die Fläche F^2_E konjugierte Durchmesser, $\mathfrak{n}_{\delta E}$ die mit dem Mittelpunkte E inzidente Normale von δ und $K^2_{\delta E}$ der δ für die Fläche F^2_E zugehörige Hauptkegel.

Beschreibt der Durchmesser $\mathfrak{x}_{\delta E}$ der Fläche F^2_E den Strahlenbüschel erster Ordnung (δE), so beschreibt die ihm für F^2_E konjugierte Ebene $\xi_{\delta E}$ den Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_{\delta E}$ und die in E zu ihm normale Ebene $\nu_{\delta E}$ den Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{n}_{\delta E}$. Beide zu dem Strahlenbüschel (δE) projektive Ebenenbüschel sind projektiv zueinander und erzeugen den Hauptkegel $K^2_{\delta E}$.

Die Fläche F^2_E falle jetzt nacheinander auf die übrigen Flächen der Büschelschar. Hierbei wird der δ für F^2_E konjugierte, also für diese Fläche zur unendlich fernen Gerade $\mathfrak{d}_\infty$ polare Durchmesser $\mathfrak{c}_{\delta E}$ die zur Büschelschar projektive Polarenregelschar $\mathfrak{R}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$ von $\mathfrak{d}_\infty$ für die Büschelscharflächen beschreiben (**11.**) und die mit dem Mittelpunkte E von

[25]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, Nürnberg 1856, Nr. 105.

F_E^2 inzidente Normale $\mathfrak{n}_{\delta E}$ von δ den zur Punktreihe $\mathfrak{t}\,(E\ldots)$ perspektiven und folglich ebenfalls zur Büschelschar projektiven Büschel der Normalen $\mathfrak{n}_{\delta E}$ von δ. Bleibt dabei — was wir nunmehr festsetzen — der in δ gelegene zu jeder Fläche F_E^2 gehörige Durchmesserbüschel $E(\mathfrak{x}_{\delta E}\ldots)$ zur Punktreihe $(X_\infty\ldots)$ auf $\mathfrak{d}_\infty$ perspektiv, so werden die dadurch projektiv aufeinander bezogenen Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{n}_{\delta E}(\nu_{\delta E}\ldots)$ kongruent und die zu ihnen projektiven bzw. mit ihnen die Hauptkegel $K_{\delta E}^2$ erzeugenden Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{c}_{\delta E}(\xi_{\delta E}\ldots)$ perspektiv zur Regelschar $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{d}\infty}^2$ aus der den Punkten X_∞ für die Büschelschar konjugierten Geraden $\mathfrak{x}$. Sie ist die Leitschar der Polarenregelschar $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}\infty}^2$ von $\mathfrak{d}_\infty$.

Mit der unendlich fernen Ebene hat die Regelschar $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{d}\infty}^2$ den der Zentragerade $\mathfrak{t}$ im geschart involutorischen Raume Σ_{ij} von C_1^1 zugeordneten Strahl $\mathfrak{t}'_\infty$ gemein (**11.**). Außerdem liegt in ihr der Leitstrahl $\mathfrak{p}_\infty$ dieser Regelschar. Die unendlich ferne Ebene schneidet folglich die durch die Punktreihe $\mathfrak{d}_\infty(X_\infty\ldots)$ projektiv aufeinander bezogenen Ebenenbüschel $\mathfrak{c}_{E\delta}(\xi_{\delta E}\ldots)$ in projektiven zu ihnen wie zur Punktreihe $\mathfrak{p}_\infty$ perspektiven Strahlenbüscheln erster Ordnung $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ mit dem gemeinsamen Deckstrahle $\mathfrak{t}'_\infty$. Zu diesen projektiven Strahlenbüscheln ist der zu den kongruenten Ebenenbüscheln $\mathfrak{n}_{\delta E}(\nu_{\delta E}\ldots)$ perspektive unendlich ferne Strahlenbüschel erster Ornung $N_{\delta E}^\infty$ projektiv. Er erzeugt mit jedem der zu ihm projektiven Strahlenbüscheln $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ den unendlich fernen Kegelschnitt $k_{\delta E}^2$ je eines der Hauptkegel $K_{\delta E}^2$.

Die zum Strahlenbüschel $N_{\delta E}^\infty$ projektiven und zu der Punktreihe auf $\mathfrak{p}_\infty$ perspektiven Strahlenbüschel $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ beziehen den Strahlenbüschel $N_{\delta E}^\infty$ projektiv auf diese Punktreihe. $\mathfrak{p}_\infty$ trägt somit zwei projektive Punktreihen, von denen die eine zu den Strahlenbüscheln $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ und die andere zu dem zu den Strahlenbüscheln $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ projektiven Strahlenbüschel $N_{\delta E}^\infty$ perspektiv liegt. Die so gekennzeichneten zwei projektiven Punktreihen bestimmen einen Büschel sie verbindender projektiven Punktreihen. In den (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelpunkten der in diesem Büschel gelegenen Involution wird die Gerade $\mathfrak{p}_\infty$ von den unendlich fernen Kegelschnitten $k_{\delta E}^2$ aller Hauptkegel $K_{\delta E}^2$ geschnitten.

Außer durch die beiden soeben gefundenen (reellen oder konjugiert imaginären) Punkte auf $\mathfrak{p}_\infty$ gehen die unendlich fernen Kegelschnitte $K_{\delta E}^2$ der Hauptkegel $K_{\delta E}^2$ durch den Punkt $N_{\delta E}^\infty$ als Mittelpunkt eines zu allen diesen Kegelschnitten perspektiven Strahlenbüschels erster Ordnung. Endlich liegt auf ihnen der Schnittpunkt S_∞ des Deckstrahles $\mathfrak{t}'_\infty$ der ∞^1 projektiven Strahlenbüschel $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ mit dem ihm entsprechenden Strahle des zu diesen Strahlenbüscheln projektiven Strahlenbüschels $N_{\delta E}^\infty$. Die unendlich fernen Kegelschnitte $k_{\delta E}^2$ auf den Hauptkegeln $K_{\delta E}^2$ bilden somit einen Kegelschnittbüschel mit zwei reellen Basispunkten $N_{\delta E}^\infty$ und S_∞ und zwei reellen oder konjugiert imaginären Basispunkten, den Doppelpunkten der eben konstruierten von der Gerade $\mathfrak{p}_\infty$ getragenen Punktinvolution.

Jeder Kegelschnitt des von den Kegelschnitten $k_{\delta E}^2$ gebildeten Büschels schneidet die Gerade $\mathfrak{t}'_\infty$ außer in dessen Basispunkte S_∞ noch in einem Punkte $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$. Die Punkte $\mathfrak{C}_{\delta E}^\infty$ bilden sonach auf $\mathfrak{t}'_\infty$ eine zum Kegelschnittbüschel perspektive Punktreihe. Sie ist durch die zu ihr (**11.**) perspektive paraboloidische Polarenregelschar $\mathfrak{R}_{\mathfrak{d}\infty}^2$ des unendlich fernen Strahles $\mathfrak{d}_\infty$ von δ projektiv auf die Punktreihe $\mathfrak{t}(E\ldots)$ der Mittelpunkte E aller Büschelscharflächen F_E^2 und der mit ihnen bzw. identischen Mittelpunkte E der Hauptkegel $K_{\delta E}^2$ bezogen. Folglich ist dargetan:

I. *Bei einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades F_E^2 mit einer eigentlichen Zentragerade* $\mathfrak{t}$ *bilden die unend-*

lich fernen Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$ der von den Flächenmittelpunkten E ausstrahlenden zu einer gemeinsamen Durchmesserebene δ gehörigen Hauptkegel $K^2_{\delta E}$ der Büschelscharflächen einen zur Punktreihe $\mathfrak{t}(E\ldots)$ der Flächenmittelpunkte E projektiven Kegelschnittbüschel.

Auf den durch die Büschelscharflächen F^2_E bestimmten Hauptkegeln $K^2_{\delta E}$ liegen die der Zentragerade t für die Flächen F^2_E bzw. konjugierten und zu ihr normalen Strahlen $\mathfrak{t}_n$. Sie bilden den zur Punktreihe $\mathfrak{t}(E\ldots)$ perspektiven Parallelstrahlenbüschel (**10.**) des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C^1_1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Somit ist der unendlich ferne Mittelpunkt dieses Parallelstrahlenbüschels, also auch der mit ihm identische unendlich ferne Punkt E'_∞ des im Parallelstrahlenbüschel gelegenen Kongruenzstrahles *e* ein Basispunkt des von den unendlich fernen Kegelschnitten $k^2_{\delta E}$ gebildeten Kegelschnittbüschels. Als ein mit t inzidenter Kongruenzstrahl schneidet *e* den t im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C^1_1 zugeordneten Strahl $\mathfrak{t}'_\infty$. Der Basispunkt E'_∞ des Büschels der Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$ ist demnach der oben bestimmte Basispunkt S_∞ dieses Büschels.

Nach dem Lehrsatze **I** bilden die von den Punkten *E* der Zentragerade t der gegebenen Büschelschar ausstrahlenden zu der gemeinsamen Durchmesserebene δ gehörigen Hauptkegel $K^2_{\delta E}$ der Büschelscharflächen die Elemente einer Kegelreihe (**9.**). Also gilt weiter:

II. *Die Hauptkegel $K^2_{\delta E}$, die für eine gemeinsame Durchmesserebene δ einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 enthaltener Flächen zweiten Grades F^2_E mit einer eigentlichen Zentragerade* t *zu den Büschelscharflächen gehören, bilden eine Kegelreihe. Sie ist projektiv zur Büschelschar, wenn jeder Fläche F^2_E der von ihrem Mittelpunkte E ausstrahlende Hauptkegel $K^2_{\delta E}$ zugeordnet wird. Der zur Reihe der Kegel $K^2_{\delta E}$ perspektive Kegelschnittbüschel besteht aus den unendlich fernen Kegelschnitten $k^2_{\delta E}$ der Kegel. Mindestens zwei Basispunkte des Büschels der Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$ sind reell. Der eine ist der unendlich ferne Punkt $N^\infty_{\delta E}$ der Normalen von δ, der andere der unendlich ferne Mittelpunkt E'_∞ des zur Punktreihe auf* t *perspektiven Parallelstrahlenbüschels aus dem Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C^1_1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Die beiden übrigen (reellen oder konjugiert imaginären) Basispunkte des Kegelschnittbüschels liegen auf dem unendlich fernen Strahle $\mathfrak{p}_\infty$ der Regelschar $\mathfrak{R}^2_{\mathfrak{d}_\infty}$, die von den Polaren der unendlich fernen Grade $\mathfrak{d}_\infty$ der gemeinsamen Durchmesserebene δ für die Büschelscharflächen F^2_E gebildet wird.*

Die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{d}_\infty$ von δ berührt das Büschelscharparaboloid im unendlich fernen Punkte $\mathfrak{T}_\infty$ der Zentragerade t. Folglich ist, worauf schon hingewiesen wurde (**11.**), $\mathfrak{p}_\infty$ die zu $\mathfrak{d}_\infty$ polare Tangente dieses Paraboloides im Punkte $\mathfrak{T}_\infty$. Nun berühren die beiden uneigentlichen Hauptachsen des Büschelscharparaboloides die Fläche selbst in $\mathfrak{T}^\infty$. Also liegen drei Strahlen des δ für das Büschelscharparaboloid zugehörigen Hauptkegels in dem unendlich fernen Strahlenbüschel erster Ordnung mit diesem Mittelpunkte. Der von $\mathfrak{T}_\infty$ ausstrahlende zu δ gehörige Hauptkegel des Büschelscharparaboloides ist demnach zerfallen in den unendlich fernen Strahlenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{T}_\infty$ und den Büschel paralleler δ für das Paraboloid konjugierten Durchmesser in der durch die unendlich ferne Tangente $\mathfrak{p}_\infty$ und die eigentliche Hauptachse der Fläche gehenden Durchmesserebene. Die unendlich ferne Ebene schneidet diesen zerfallenen Hauptkegel in dem Strahlenpaare $\mathfrak{p}_\infty$, $N^\infty_{\delta E}\,E'_\infty$ des zur Reihe der Hauptkegel $K^2_{\delta E}$ perspektiven Büschels der Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$.

13. In einem Bündelheere einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t liegt nach dem

Lehrsatze **II** von Nummer **1** eine besondere Büschelschar. Ihre Flächen haben die von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 verschiedene mit t inzidente Tangentenebene μ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 der Kongruenz zur gemeinsamen Symmetrieebene und zu der zu μ senkrechten Hauptachse je einen Strahl aus dem Büschel paralleler mit t inzidenten Strahlen e des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Zwei Büschelscharen des Bündelheeres schneiden einander in je einer Fläche. Folglich enthält in unserem Bündelheere mit der Zentragerade t jede von der besonderen Büschelschar verschiedene je eine Fläche mit einem Strahle e_0 aus dem Büschel paralleler mit t inzidenten Strahlen e von Γ^2 als Hauptachse. Und da durch jede Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer Zentragerade t ein Bündelheer solcher Flächen mit der Zentragerade t geht, schließen wir:

In jeder Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t *und mit keiner allen gemeinsamen Symmetrieebene liegt eine und nur eine Fläche $F^2_{E_0}$, die einen Strahl* e_0 *aus dem Büschel paralleler mit* t *inzidenten Strahlen* e *des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades zur Hauptachse hat. Die den gemeinsamen Durchmesserebenen der Büschelschar zugehörigen Hauptkegel der Fläche $F^2_{E_0}$ berühren einander längs* e_0.

14. Aus einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t greifen wir zwei Flächen zweiten Grades F^2_X, F^2_Y heraus. Ihre Mittelpunkte seien X, Y, ihre Hauptachsendreibeine $r_X s_X t_X$, $r_Y s_Y t_Y$. Die Ecken der unendlich fernen Dreiecke $\Re^\infty_X S^\infty_X T^\infty_X$, $\Re^\infty_Y S^\infty_Y T^\infty_Y$ dieser Hauptachsendreibeine liegen bekanntlich auf einem Kegelschnitte t^2_∞, ihre Seiten in einer Strahlenkurve zweiter Ordnung τ^2_∞. Sie ist perspektiv (**3.**) zu dem durch die Seitenflächen der beiden Hauptachsendreibeine gehenden dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 umbeschriebenen gleichseitig parabolischen Ebenengewinde dritter Ordnung τ^3 mit der Zentragerade $XY = t$.

Dem Kegelschnitte t^2_∞ sind die unendlich fernen Dreiecke aller ∞^1 in der Biplanarenkongruenz von τ^3 enthaltenen Dreibeine einbeschrieben (**3.**). Ihre Seiten sind Strahlen der Strahlenkurve τ^2_∞. Jedes der Biplanarendreibeine von τ^3 liegt sowohl auf der biquadratischen Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ dieses gleichseitig parabolischen Ebenengewindes wie auf dem von dem Mittelpunkte E des Biplanarendreibeines ausstrahlenden Kegel $K^2_{\gamma E}$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades. Folglich schneidet der unendlich ferne Kegelschnitt $k^2_{\gamma E}$ jedes Kegels $K^2_{\gamma E}$ den zur Regelschar $\mathfrak{T}^4$ perspektiven Kegelschnitt t^2_∞ in je einem Punktequadrupel, das durch die drei Ecken des unendlich fernen Dreiecks je eines Biplanarendreibeins von τ^3 geht.

Die von den Punkten E von t ausstrahlenden Kegel $K^2_{\gamma E}$ von Γ^2 werden von der unendlich fernen Ebene in einem Büschel von Kegelschnitten geschnitten (**9.**). Einer seiner Basispunkte ist der unendlich ferne Mittelpunkt E'_∞ des zur Punktreihe $t(E \ldots)$ perspektiven Büschels paralleler Strahlen e des Hauptachsenkomplexes Γ^2. Als Punkt der unendlich fernen Ebene, die ja Schmiegungsebene des gleichseitig parabolischen Ebenengewindes τ^3 ist, liegt E'_∞ auf einer in dem Büschel paralleler Strahlen e enthaltenen, also mit der Zentragerade t inzidenten Biplanare e_0 von τ^3. Die mit t inzidenten Biplanaren von τ^3 bilden aber die zum unendlich fernen Kegelschnitte t^2_∞ perspektive Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ dieses gleichseitig parabolischen Ebenengewindes. Folglich ist E'_∞ selbst ein Punkt von t^2_∞. Der unendlich ferne Kegelschnitt $k^2_{\gamma E}$ jedes von den Punkten E der

Zentragerade t ausstrahlenden Kegels $K^2_{\gamma E}$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 schneidet also t^2_∞ außer in den Ecken des diesem Kegelschnitte einbeschriebenen unendlich fernen Dreiecks je eines Dreibeines auf $\mathfrak{T}^4$ noch in dem Punkte E'_∞. Mit t^2_∞ haben demnach die Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ außer dem Punkte E'_∞ noch die Punktetripel einer kubischen Involution gemein.

Es sei jetzt die Reihe der einer gegebenen gemeinsamen Durchmesserebene δ der Büschelschar zugehörigen Hauptkegel $K^2_{\delta E}$ aller Büschelscharflächen gegeben. Dann ist nach dem Lehrsatze **II** von Nummer **12** der Punkt E'_∞ auf t^2_∞ auch ein Basispunkt des zu dieser Kegelreihe perspektiven Büschels unendlich ferner Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$ auf den Kegeln $K^2_{\delta E}$. Bekanntlich schneiden aber in einer Ebene die Elemente eines Kegelschnittbüschels, dessen einer Basispunkt auf einem nicht im Büschel enthaltenen Kegelschnitte liegt, diesen noch in den Punktetripeln einer kubischen Involution. Folglich haben wir jetzt auf t^2_∞ außer der zum Büschel der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ perspektiven kubischen Punktinvolution noch eine zum Büschel der Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$ perspektive. Beide kubischen Involutionen gehen jedoch nach der anfangs dieser Nummer getroffenen Voraussetzung durch die zwei Punktetripel $\mathfrak{R}^\infty_X S^\infty_X T^\infty_X$, $\mathfrak{R}^\infty_Y S^\infty_Y T^\infty_Y$. Sonach fallen sie zusammen. D. h. auf t^2_∞ ist jedes Punktetripel auf einem Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ zugleich ein Punktetripel auf einem Kegelschnitte $k^2_{\delta E}$.

Alle auf der Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ des gleichseitig parabolischen Ebenengewindes τ^3 gelegenen Dreibeine sind bzw. perspektiv zu den t^2_∞ einbeschriebenen Dreiecken, deren Seiten in dem unendlich fernen zu τ^3 perspektiven unendlich fernen Strahlenkegelschnitte τ^2_∞ liegen (**3.**), deren Ecken also bzw. die Punktetripel der eben gefundenen von t^2_∞ getragenen kubischen Punktinvolution sind. Eins dieser unendlich fernen Dreiecke ist das durch den gemeinsamen Basispunkt E'_∞ der beiden Büschel der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ und $k^2_{\delta E}$ bestimmte Dreieck $E'_\infty F^\infty_{E_0} G^\infty_{E_0}$. Es liegt, da unsere Biplanare $\mathfrak{e}_0$ von τ^3 durch E'_∞ geht, auf dem $\mathfrak{e}_0$ enthaltenden Dreibeine $\mathfrak{e}_0 f_0 g_0$ von $\mathfrak{T}^4$. Dieses vom Schnittpunkte E_0 von $\mathfrak{e}_0$ mit der Zentragerade t ausstrahlende Dreibein ist zugleich das Hauptachsendreibein der Büschelscharfläche $F^2_{E_0}$ mit dem Mittelpunkte E_0. Denn die durch $F^2_{E_0}$ bestimmten bzw. der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C^1_1 und der gemeinsamen Durchmesserebene δ der Büschelschar zugehörigen Hauptkegel $K^2_{\gamma E_0}$, $K^2_{\delta E_0}$ berühren einander längs $\mathfrak{e}_0$, schneiden einander in f_0, g_0 und gehen bzw. durch die t^2_∞ in E'_∞ berührenden Kegelschnitte $k^2_{\gamma E_0}$, $k^2_{\delta E_0}$. Die Büschelscharfläche $F^2_{E_0}$ erweist sich hiernach zugleich als diejenige Fläche der Büschelschar (**13.**), die zur Hauptachse $\mathfrak{e}_0$ einen Strahl aus dem Büschel paralleler mit t inzidenten Strahlen des Hauptachsenkomplexes Γ^2 hat.

Die zwei zu unserer Büschelschar mit der Zentragerade t nach den Nummern **8** und **11** (Lehrsatz **II**) projektiven Reihen der Kegel $K^2_{\gamma E}$ und $K^2_{\delta E}$ sind durch die Büschelschar projektiv aufeinander bezogen. Homologe Kegel schneiden einander je in einem Strahle $\mathfrak{e}$ und in dem Hauptachsendreibeine einer Büschelscharfläche. Außer dem Büschel paralleler mit t inzidenten Strahlen $\mathfrak{e}$ von Γ^2 erzeugen somit die beiden projektiven Reihen der Hauptkegel $K^2_{\gamma E}$ und $K^2_{\delta E}$ die Regelschar der Hauptachsenfläche unserer Büschelschar einscharig in C^1_1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der Zentragerade t. Die zu den projektiven Reihen der Kegel $K^2_{\gamma E}$ und $K^2_{\delta E}$ bzw. perspektiven Büschel der

Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ und $k^2_{\delta E}$ sind ebenfalls projektiv zueinander. Zwei projektive Kegelschnittbüschel einer Ebene erzeugen aber eine biquadratische Kurve. Demnach hat die Hauptachsenfläche der Büschelschar mit der unendlich fernen Ebene eine Kurve vierter Ordnung gemein. Auf ihr liegen u. a. die Ecken der unendlich fernen Dreiecke $\mathfrak{R}^\infty_X S^\infty_X T^\infty_X$, $\mathfrak{R}^\infty_Y S^\infty_Y T^\infty_Y$ auf den Hauptachsendreibeinen $r_X s_X t_X$, $r_Y s_Y t_Y$ der früher herausgegriffenen Büschelscharflächen F^2_X, F^2_Y und die Ecken des unendlich fernen Dreiecks $E'_\infty F^\infty_{E_\infty} G^\infty_{E_\infty}$ auf dem Hauptachsendreibeine $\mathfrak{e}_0 f_0 g_0$ der oben ermittelten Büschelscharfläche $F^2_{E_0}$. — Die Ecken dieser drei Dreiecke sind Punktetripel der kubischen Punktinvolution auf $\mathfrak{t}^2_\infty$, die zu den Büscheln der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ und $k^2_{\delta E}$ perspektiv ist. Folglich hat die biquadratische Kurve mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{t}^2_\infty$ mehr als acht Punkte und somit alle Punkte gemein. Außer aus $\mathfrak{t}^2_\infty$ besteht die biquadratische Kurve aus dem von den beiden uneigentlichen Hauptachsen des Büschelscharparaboloides gebildeten zerfallenen Kegelschnitte. Sein Doppelpunkt ist der auf $\mathfrak{t}^2_\infty$ gelegene unendlich ferne Punkt $\mathfrak{T}_\infty$ der Zentragerade t.

Der Kegelschnitt $\mathfrak{t}^2_\infty$ ist hiernach durch die zwei projektiven Büschel der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ und $k^2_{\delta E}$ zu erzeugen. Homologe Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$, $k^2_{\delta E}$ schneiden einander auf $\mathfrak{t}^2_\infty$ außer in dem gemeinsamen Punkte E'_∞ noch je in den Punktetripeln der zu diesen Kegelschnittbüscheln projektiven kubischen Punktinvolution. Zu den projektiven Büscheln der Kegelschnitte $k^2_{\gamma E}$ und $k^2_{\delta E}$ waren aber bzw. die projektiven Reihen der Hauptkegel $K^2_{\gamma E}$, $K^2_{\delta E}$ perspektiv. Und je zwei homologe Kegel $K^2_{\gamma E}$, $K^2_{\delta E}$ schnitten einander außer je in einem Strahle des Büschels paralleler mit der Zentragerade t inzidenten Strahlen $\mathfrak{e}$ des Hauptachsenkomplexes Γ^2 noch in den Hauptachsendreibeinen der die homologen Kegel bestimmenden Büschelscharflächen F^2_E. Folglich bilden die Punktetripel unserer kubischen Involution auf $\mathfrak{t}^2_\infty$ die Ecken der unendlich fernen Dreiecke auf den Hauptachsendreibeinen dieser Flächen. Nun sind, wie schon einmal im vorliegenden Beweise auf Seite 19 hervorgehoben, diese Punktetripel auch die Ecken der unendlich fernen Dreiecke auf den Dreibeinen der Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ des gleichseitig parabolischen Ebenengewindes τ^3. Also fallen die Hauptachsendreibeine der Flächen aus der Büschelschar einscharig in C^1_1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit der eigentlichen Zentragerade t auf die in der biquadratischen Regelschar $\mathfrak{T}^4$ gelegenen Dreibeine.

Bezeichnen wir eine durch ∞^1 Dreibeine gehende biquadratische Regelfläche als „biquadratische Dreibeinregelfläche", so lassen sich die für die Hauptachsenfläche einer Büschelschar einscharig in C^1_1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t erlangten Ergebnisse wie folgt aussprechen:

Eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C^1_1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t *hat zur Hauptachsenfläche eine biquadratische Dreibeinregelfläche T^4 mit der Gerade* t *dreifacher Punkte. Die Symmetrieebenen der Büschelscharflächen sind die T^4 in Punktepaaren berührenden Ebenen. Sie erfüllen ein gleichseitig parabolisches Ebenengewinde dritter Ordnung τ^3 mit* t *als Zentragerade. Seine Dreibeinregelschar ist die Regelschar $\mathfrak{T}^4$ von T^4. Die je den gemeinsamen Durchmesserebenen der Büschelschar zugehörigen durch die Büschelscharflächen bestimmten Hauptkegel bilden ∞^1 durch die Büschelschar projektiv aufeinander bezogene zu der Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ perspektive Kegelreihen. Je zwei dieser projektiven Kegelreihen erzeugen sowohl die* (**3.**) *im Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C^1_1 enthaltenen Flächen zweiten Grades gelegene Dreibeinregelschar $\mathfrak{T}^4$ wie auch den Büschel paralleler mit der Zentragerade* t *inzidenten Strahlen* $\mathfrak{e}$ *von Γ^2.*

15. Jede eigentliche Gerade t auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist **(1.)** die Zentragerade je eines Bündelheeres einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades. In ihm liegen ∞^2 Büschelscharen mit der Zentragerade t. Alle haben **(14.)** je eine biquadratische Dreibeinregelfläche mit einer im Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades gelegenen Regelschar zur Hauptachsenfläche. Die Symmetrieebenen der Flächen jeder dieser ∞^2 Büschelscharen bilden **(14.)** je ein gleichseitig parabolisches Ebenengewinde dritter Ordnung mit der Zentragerade t. Es ist nach den Nummern **3** und **14** dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 umbeschrieben. Zusammengefaßt ist also dargetan:

Im Hauptachsenkomplexe Γ^2 aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades liegen die Regelscharen von ∞^4 biquadratischen Dreibeinregelflächen. Jede eigentliche Gerade t *auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 ist die gemeinsame Gerade dreifacher Punkte von ∞^2 solcher Regelscharen. Dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 sind ∞^4 gleichseitig parabolische Ebenengewinde dritter Ordnung umbeschrieben. Jede eigentliche Gerade* t *von γ ist die gemeinsame Zentragerade von ∞^2 dieser kubischen Ebenengewinde.*

E. Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltener Paraboloide.

16. Enthält eine zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 parallele Ebene ξ zwei reelle getrennte (im Grenzfalle vereinigte) Regelstrahlen des mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 orthogonal [26]) verknüpften Zylindroides C^3, so liegen in ihr [27]) die eigentlichen Hauptachsen aller nicht zerfallenen Paraboloide zweier getrennten (im Grenzfalle vereinigten) Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide. Die Paraboloide jeder der beiden Büschelscharen berühren einander längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞. Ihre in der Ebene ξ gelegenen Hauptachsen bilden je einen Parallelstrahlenbüschel. (Beide Parallelstrahlenbüschel sind im Grenzfalle vereinigt.) In der Fluchtebene γ fallen die Strahlen dieser beiden Parallelstrahlenbüschel je mit der einen und der anderen Nebensymmetrieachse der Kongruenz zusammen.

Alle in C_1^1 einscharig enthaltenen Paraboloide bilden ein Bündelheer [28]). Je zwei seiner Büschelscharen schneiden einander also in einem Paraboloide. Somit ordnen sich die Flächen jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide, sofern sie einander nicht längs c_∞ berühren, zu Flächenpaaren, deren Elemente je eine Hauptachse bzw. in die Ebenen ξ des durch γ gehenden Büschels paralleler Ebenen senden. Das in jeder der beiden Kuspidalebenen des Zylindroides C^3 gelegene Hauptachsenpaar ist je mit einem Strahle vereinigt.

Jeder Strahl von C_1^1 bildet mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ ein Paar Gegenseiten des Basisvierseits je einer Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener längs c_∞ einander nicht berührenden Paraboloide. Die Berührungspunkte der Büschelscharparaboloide mit der unendlich fernen Ebene sind die Elemente einer von c_∞ ge-

---

[26]) Die unter [22]) angeführte Abhandlung, Nr. 37.
[27]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 25.
[28]) Die unter [9]) angeführte Abhandlung, Nr. 1.

tragenen zur Büschelschar perspektiven Punktreihe. Sie wird aus einem gegebenen eigentlichen Punkte X durch einen zur Büschelschar projektiven aus Paraboloidendurchmessern bestehenden Strahlenbüschel erster Ordnung projiziert. Seine Trägerebene läuft parallel zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}. Die zu den Strahlen des Durchmesserbüschels X senkrechten mit dem Punkte X inzidenten Ebenen α sind somit die Elemente eines zum Durchmesserbüschel X projektiven Ebenenbüschels erster Ordnung $\mathfrak{x}(\alpha \ldots)$, dessen Achse $\mathfrak{x}$ der durch X gehende zu γ senkrechte Strahl $\mathfrak{x}$ ist.

Zu der unendlich fernen Gerade $\mathfrak{a}_\infty$ jeder der Ebenen α ist die eigentliche Hauptachse je eines Paraboloides aus der Paraboloidenbüschelschar für dieses Paraboloid polar. Ferner läuft die Achse $\mathfrak{x}$ des Ebenenbüschels $\mathfrak{x}(\alpha \ldots)$ parallel zur Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1. Sonach sind die unendlich fernen Geraden $\mathfrak{a}_\infty$ identisch mit den unendlich fernen Strahlen des unendlich fernen Punktes C'_∞ von c_d. Die Polarebenen von C'_∞ für alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades sind aber bekanntlich mit dem C'_∞ in Σ_{ig} zugeordneten Mittelpunkte C der Kongruenz inzident. Insbesondere bilden die Polarebenen von C'_∞ für die Flächen einer gegebenen Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung einen Ebenenbüschel erster Ordnung mit einer mit C inzidenten Achse. Also ist auch die dem Punkte C'_∞ für die Paraboloidenbüschelschar konjugierte Gerade $\mathfrak{c}_d$ ein Strahl von C. In jeder Ebene von $\mathfrak{c}_d$ liegt aber die Hauptachse $\mathfrak{a}$ eines Paraboloides unserer Büschelschar. Ferner liegen die Hauptachsen $\mathfrak{a}$, wie am Anfange dieser Nummer hervorgehoben, paarweise in den Ebenen ξ des durch die Fluchtebene γ von Σ_{ig} gehenden Parallelebenenbüschels. Folglich erweist sich die Gerade $\mathfrak{c}_d$ als Doppelpunktsgerade der von den Hauptachsen $\mathfrak{a}$ der Büschelscharparaboloide erfüllten Fläche.

Die Affinität zweier perspektiv affinen Räume mit der Affinitätsebene γ ist speziell, sobald in ihnen die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 und die soeben gefundene Gerade $\mathfrak{c}_d$ zu homologen Strahlen und bzw. die Schnittpunkte P_d, $\mathfrak{P}_d$ der Strahlen c_d, $\mathfrak{c}_d$ mit einer zu γ parallelen Ebene ξ zu homologen Punkten gewählt werden. c_d ist aber die Doppelpunktsgerade der Fläche, auf der die eigentlichen Hauptachsen der Elemente aus der Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide liegen [29]), $\mathfrak{c}_d$ die Doppelpunktsgerade der Fläche, die durch die eigentlichen Hauptachsen der Elemente unserer Büschelschar von Paraboloiden geht. Beide Flächen gehen durch die Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1. In einer zu γ parallelen Ebene ξ sind endlich stets die beiden Regelstrahlen der einen Fläche bzw. parallel zu den in ihr gelegenen beiden Regelstrahlen der andern. Somit sind beide Flächen homologe Gebilde der soeben bestimmten perspektiv affinen Räume. Da aber die Fläche, auf der die Hauptachsen der Elemente der Büschelschar gleichseitiger Paraboloide liegen, ein Zylindroid ist mit der Doppelpunktsgerade c_d und der einfachen Leitgerade c_∞, so ist die Fläche, auf der die eigentlichen Hauptachsen der Elemente unserer Büschelschar von Paraboloiden liegen, eine kubische Regelfläche T^3 mit der Doppelpunktsgerade $\mathfrak{c}_d$ und der einfachen Leitgerade c_∞. Sie werde als die Hauptachsenfläche der Büschelschar bezeichnet. Somit gilt:

I. *Bei einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide, die einander nicht längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ berühren, bilden die eigentlichen Hauptachsen der Paraboloide die Regelschar $\mathfrak{T}^3$ auf der (kubischen) Hauptachsenfläche T^3 der Büschelschar. Die Doppelpunktsgerade $\mathfrak{c}_d$ von T^3 ist mit dem*

[29]) Die unter [1]) angeführte Abhandlung, Nr. 28.

Mittelpunkte C von C_1^1 inzident und dem unendlich fernen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz für die Büschelschar konjugiert. Jede Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide, die einander nicht längs c_∞ berühren, bestimmt für ihre Hauptachsenfläche T^3 eine andere Doppelpunktsgerade $\mathfrak{c}_d$, aber ein und dieselbe einfache Leitgerade c_∞. Die Hauptachsenfläche der Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide ist das einzige Zylindroid unter den ∞^2 Hauptachsenflächen T^3.

Auf dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ bilden die Punkte, in denen die Paraboloide unserer Büschelschar die unendlich ferne Ebene berühren, eine zur Büschelschar projektive Punktreihe. Und die eigentliche Hauptachse jedes Paraboloides ist dabei mit dem ihm entsprechenden Punkte inzident. Somit folgt weiter:

II. *Eine Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide, die einander nicht längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ berühren, ist projektiv zur Regelschar $\mathfrak{T}^3$ der Hauptachsenfläche T^3 der Büschelschar, sobald jedem Büschelscharparaboloide seine eigentliche Hauptachse entspricht.*

Jede Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener einander nicht längs c_∞ berührenden Paraboloide hat, worauf schon einmal in dieser Nummer hingewiesen wurde, außer c_∞ noch einen zweiten Kongruenzstrahl p gemein. Zu ihr ist in der unendlich fernen Ebene ein Büschel in Strahlenpaare zerfallener Kegelschnitte perspektiv. Der eine Strahl jedes solchen Strahlenpaares ist c_∞, der andere mit dem unendlich fernen Punkte P_∞ von p inzident. Die Achsenpaare der zerfallenen Kegelschnitte sind somit je die zueinander senkrechten Strahlen einer unendlich fernen Strahlenparabel mit dem Brennpunkte P_∞ und der Direktrix c_∞. Sie sind zugleich die Paare uneigentlicher Hauptachsen der Büschelscharparaboloide.

Die Regelschar $\mathfrak{T}^4$ der Hauptachsenfläche T^4 einer Büschelschar einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t besteht hiernach, wenn diese Büschelschar in eine Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener einander nicht längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ berührenden Paraboloide übergegangen ist, aus einer kubischen Regelschar $\mathfrak{T}^3$ und einer unendlich fernen Strahlenparabel.

17. In Nummer **14** haben wir die Hauptachsenflächen der Büschelscharen einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentragerade t definiert und erforscht, in Nummer **16** die der Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ einander nicht berührenden Paraboloide. Sonach bleibt uns nur noch die Aufgabe, im Gebüschverbande der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiten Grades nach den Hauptachsenflächen der ∞^1 Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener längs c_∞ einander berührenden Paraboloide umzuschauen.

Alle Büschelscharen längs c_∞ einander berührender Paraboloide gehen durch das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞. Es hat ∞^2 je von den einzelnen Punkten der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 ausstrahlende Hauptachsendreibeine [4]). Jedes von ihnen wird von je drei Hauptachsen der Fläche gebildet, die bzw. zu den zwei Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ und der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 parallel laufen. Außer diesen ∞^2 Hauptachsendreibeinen, die alle ∞^1 Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener längs c_∞ einander berührenden Paraboloide gemein haben, bestimmen die Paraboloide jeder ein-

zelnen dieser Büschelscharen noch je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung von Hauptachsen [1]). Der eine ist nach Satz **IV** in Nummer **8** ein zur Büschelschar projektiver Parallelstrahlenbüschel in je einer zu γ parallelen Ebene, der andere nach dem Schlußabschnitte genannter Nummer der vom unendlich fernen Mittelpunkte der Parallelstrahlenbüschel ausstrahlende ebenfalls zur Büschelschar projektive unendlich ferne orthogonale Strahlenbüschel erster Ordnung. Bei jeder Büschelschar einscharig in C_1^1 enthaltener längs c_∞ einander berührenden Paraboloide bezeichnen wir von diesen beiden zu ihr projektiven Hauptachsenbüscheln den Parallelstrahlenbüschel als die Hauptachsenfläche der Büschelschar. Somit ist nunmehr auch für jede dieser ∞^1 Büschelscharen einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiten Grades eine sie charakterisierende Hauptachsenfläche gewonnen.

Berlin-Halensee, d. 25. August 1933.

Eingegangen 10. Oktober 1933.

Zur Theorie der algebraischen und gewisser transzendenten Gleichungen[1]).

Von *Julius v. Sz. Nagy* in Szeged (Ungarn).

§ 1. Einleitung.

Eine ganze Funktion ist reell, wenn ihr Wert in jedem Punkte der reellen Achse reell ist. Ist $f(z)$ ein reelles Polynom oder eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht Null oder Eins und ist γ eine nichtnegative reelle Konstante, so wird die ganze Funktion

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} f(z)$$

eine Funktion vom Geschlecht 1^*[2]) und die nichtnegative Zahl γ *der Exponent der Funktion* $F(z)$ genannt werden.

Der Differenzenquotient der Funktion $\dfrac{F'(z)}{F(z)}$ (der logarithmischen Derivierten von $F(z)$) für das Argumentenpaar $a + ib$ und $a - ib$, d. h. die reelle Zahl

$$K(a + ib) = K(a - ib) = \frac{1}{2bi}\left[\frac{F'(a + ib)}{F(a + ib)} - \frac{F'(a - ib)}{F(a - ib)}\right]$$

wird *der kritische Wert der Funktion* $F(z)$ im Punkte $a + ib$ oder in seinem konjugierten $a - ib$ genannt werden.

Im Punkte a der reellen Achse ist

$$K(a) = \lim_{b \to 0} \frac{1}{2bi}\left[\frac{F'(a + ib)}{F(a + ib)} - \frac{F'(a - ib)}{F(a - ib)}\right] = \left[\frac{F'(a)}{F(a)}\right]' = \frac{F(a)\,F''(a) - F'^2(a)}{F^2(a)}.$$

Aus der Definition des kritischen Wertes folgt, daß

$$K(a + ib) = K(a - ib) = \frac{B}{b} \text{ ist, wenn } \frac{F'(a + ib)}{F(a + ib)} = A + iB$$

ist.

Die Punkte der komplexen Ebene, in denen der kritische Wert der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1^* nicht negativ ist, werden *kritische Punkte erster Ordnung* oder kurz *kritische Punkte* der Funktion genannt. Die kritischen Punkte der k-ten Derivierten $F^{(k)}(z)$ sind *die kritischen Punkte* $(k + 1)$*-ter Ordnung* in bezug auf die Funktion $F(z)$.

Die hier gegebene Definition der kritischen Punkte ist eine natürliche Verallgemeinerung der von uns herrührenden Definition der reellen kritischen Punkte[3]).

[1]) Diese Arbeit ist die Umarbeitung einer ungarischen Arbeit des Verfassers (vorgelegt der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 1. Mai 1933).

[2]) G. Pólya, Über die algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen von J. W. V. Jensen, Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Math.-fys. Meddelelser VII, **17** (1927), S. 6, und: Some problems connected with Fourier's work on transcendental equations, The Quaterly Journal of Math., Oxford Series, **1** (1930), S. 24.

[3]) Julius v. Sz. Nagy, Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen, Journal für Mathematik **170** (1934), S. 133—147. Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit N zitiert werden.

Hat eine Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* nichtreelle Nullstellen, so hat sie immer nichtreelle kritische Punkte, sie kann aber keine reellen kritischen Punkte (erster Ordnung) haben.

Ein kritischer Punkt $a + ib$ der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* bestimmt eine gleichseitige Hyperbel H, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke der Punkte $a + ib$ und $a - ib$ in der komplexen Ebene ist. Die Funktion $F(z)$ hat immer Nullstellen auf der Hyperbel oder im Inneren der Hyperbel (d. h. dem Teil der Ebene, von dem keine Tangenten an H gehen).

Hat die Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* im Inneren der Hyperbel H nur endlichviele Nullstellen und kennt man im kritischen Punkte $a + ib$ den kritischen Wert, oder kennt man den Exponenten γ der Funktion oder mindestens eine ihrer reellen Nullstellen, so kann man eine aus zwei Ovalen bestehende Cassinische Kurve bestimmen, deren Ovale im Innern oder am Rande mindestens je eine nichtreelle Nullstelle der Funktion $F(z)$ enthalten.

§ 2. Die kritischen Punkte und die kritischen Bereiche.

Eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* läßt sich immer in der Form

$$(1) \qquad F(z) = e^{-\gamma z^2 + \delta z + \varepsilon z^m} \prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}$$

darstellen, wo m eine nichtnegative ganze Zahl, $\gamma(\geqq 0)$, δ und ε reelle Zahlen bedeuten und die Nullstellen α_k reell oder paarweise konjugiert komplex sind.

Aus der Darstellung (1) der Funktion $F(z)$ folgt, daß

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = -2\gamma z + \delta + \frac{m}{z} + \sum \left(\frac{1}{z - \alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\right)$$

ist. Daraus folgt die folgende Form des kritischen Wertes

$$(2) \qquad K(a + ib) = K(a - ib) = \frac{1}{2bi}\left[\frac{F'(a + ib)}{F(a + ib)} - \frac{F'(a - ib)}{F(a - ib)}\right]$$
$$= -2\gamma - \sum \frac{1}{(\alpha_k - a)^2 + b^2},$$

wo jede Nullstelle von $F(z)$ in der Summe so oft vorkommt, wie ihre Multiplizität angibt. (Die Nullstelle $\alpha = 0$ kommt in der Summe m-mal vor.)

Ist $\alpha_k = x_k + iy_k$, so erhält man aus (2) die Gleichung

$$(3) \quad K(a + ib) = K(a - ib) = K = -2\gamma - \sum \frac{U(x_k, y_k)}{U^2(x_k, y_k) + V^2(x_k, y_k)},$$

wo

$$(4) \qquad U(x, y) = (x - a)^2 - y^2 + b^2 \quad \text{und} \quad V(x, y) = 2(x - a)y$$

oder

$$(5) \quad U(x, y) + iV(x\ \ y) = [(x + iy) - (a + ib)][(x + iy) - (a - ib)]$$
$$= [z - (a + ib)][z - (a - ib)]$$

ist.

Ist die Nullstelle α_k nichtreell, so ist auch ihre Konjugierte eine Nullstelle von $F(z)$. Die zu diesen Nullstellen gehörigen Glieder der Summe von (3) sind gleich. Ist also α_k eine h-fache nichtreelle Nullstelle von $F(z)$, so liefern α_k und ihre Konjugierte $2h$ gleiche Glieder in der Summe von (3).

Ein Punkt $a + ib$ oder $a - ib$ der komplexen Ebene ist ein kritischer Punkt der Funktion $F(z)$, wenn

$$(6) \qquad K = -2\gamma - \sum \frac{U(x_k, y_k)}{U^2(x_k, y_k) + V^2(x_k, y_k)}$$

$$= -2\gamma - \sum \frac{(x_k - a)^2 - y_k^2 + b^2}{[(x_k - a)^2 - y_k^2 + b^2]^2 + 4(x_k - a)^2 y_k^2} \geqq 0$$

ist. Die reellen kritischen Punkte weichen aber von den Nullstellen der Funktion $F(z)$ ab.

Auf Grund der Ungleichung (6) kann man leicht den folgenden Satz einsehen:

I. *Eine Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* hat nur dann kritische Punkte, wenn sie auch nichtreelle Nullstellen hat. Hat die Funktion mindestens zwei nichtreelle Nullstellen, so hat sie immer nichtreelle kritische Punkte.*

Hat nämlich die Funktion $F(z)$ keine nichtreellen Nullstellen, so ist in der Summe von (6) $y_k = 0$ für jeden Index k. In diesem Falle hat die Ungleichung (6) in jedem Punkte $a + ib$ der komplexen Ebene die Form

$$K = -2\gamma - \sum \frac{1}{(x_k - a)^2 + b^2} < 0,$$

ausgenommen nur die spezielle Form $F(z) = e^{\delta z + \varepsilon}$ der Funktion $F(z)$. Für die Funktion $F(z)$ von der Form $e^{\delta z + \varepsilon}$ verschwindet nämlich der kritische Wert in jedem Punkte der komplexen Ebene.

Hat die Funktion $F(z)$ die nichtreelle Nullstelle $x_k + iy_k$, so hat sie nichtreelle kritische Punkte. Der kritische Wert $K(a + ib)$ nimmt nämlich in den Punkten $a + ib$, für welche $a = x_k$ ist und $b^2 - y_k^2$ eine genügend kleine positive Zahl ist, auf Grund von (6) offenbar positive Zahlenwerte an. Man kann leicht einsehen, daß es in der Nähe der nichtreellen Nullstellen $x_k + iy_k$ von $F(z)$ auch solche nichtreelle kritische Punkte gibt, für welche $a \neq x_k$ ist.

Die kritischen Punkte einer Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*, die mindestens zwei nichtreelle Nullstellen hat, bilden in der komplexen Ebene gewisse Bereiche, *die kritischen Bereiche der Funktion.* Diese Bereiche sind von denjenigen kritischen Punkten der Funktion begrenzt, in denen der kritische Wert verschwindet. Diese Randpunkte bilden eine im allgemeinen mehrzügige Kurve, deren Gleichung in der (x, y)-Ebene

$$-K \equiv 2\gamma + \sum \frac{(x_k - x)^2 - y_k^2 + y^2}{[(x_k - x)^2 - y_k^2 + y^2]^2 + 4(x_k - x)^2 y_k^2} = 0$$

ist.

Die Punkte $a + ib$ der komplexen Ebene, in denen die Summe des kritischen Wertes und des zweifachen Exponenten der ganzen Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* nichtnegativ ist, in denen also

$$(7) \qquad K + 2\gamma \equiv -\sum \frac{U(x_k, y_k)}{U^2(x_k, y_k) + V^2(x_k, y_k)} \geqq 0$$

ist, werden *erhöhte kritische Punkte der Funktion $F(z)$* genannt.

Bedeutet Σ_1 die Summe derjenigen Glieder der Summe (7), die sich auf die reellen Nullstellen von $F(z)$ beziehen, und bedeutet Σ_2 die Summe der übrigen Glieder, so werden die Punkte $a + ib$ der komplexen Ebene, in denen

$$(8) \qquad K + 2\gamma + \Sigma_1 \equiv -\Sigma_2 \geqq 0$$

ist, *erweiterte kritische Punkte der Funktion $F(z)$* genannt.

Die Bereiche der erweiterten kritischen Punkte enthalten die Bereiche der erhöhten kritischen Punkte offenbar in sich. Die gewöhnlichen kritischen Bereiche liegen

auch im Innern der erhöhten kritischen Bereiche, wenn der Exponent der Funktion $F(z)$ von Null verschieden ist.

Die Punkte $a + ib$ der komplexen Ebene, in denen der kritische Wert $K(a + ib)$ der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* negativ ist, aber die Zahl

$$K^*(a + ib) \equiv K^*(a - ib) \equiv -K(a + ib) - 2\gamma - \Sigma_1 > 0 \tag{9}$$

ist, werden *modifizierte kritische Punkte* der Funktion genannt.

Aus der Definition folgt, daß ein modifizierter kritischer Punkt niemals ein gewöhnlicher kritischer Punkt sein kann.

Zur Bestimmung des modifizierten kritischen Wertes ist die Kenntnis des Exponenten und der reellen Nullstellen von $F(z)$ erforderlich. Kennt man im Punkte $a + ib$ den kritischen Wert K nicht, aber weiß man, daß

$$K^*(a + ib) \equiv -K(a + ib) - 2\gamma - \Sigma_1 \geqq M > 0$$

ist, so ist $a + ib$ ein modifizierter kritischer Punkt.

§ 3. Sätze mit Hyperbeln und mit Jensenschen Kreisen und Ellipsen.

Nennt man die Menge der Punkte der komplexen Ebene, aus denen zwei verschiedene bzw. keine reellen Tangenten an eine Hyperbel der Ebene gezogen werden können, das Äußere bzw. Innere der Hyperbel, so gilt der folgende Satz[4]):

II. *Ist $a + ib$ ein kritischer Punkt der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* und bedeutet $H(a + ib)$ die gleichseitige Hyperbel, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke der kritischen Punkte $a + ib$ und $a - ib$ in der komplexen Ebene ist, so verschwindet die Funktion $F(z)$ mindestens zweimal auf der Hyperbel $H(a + ib)$ oder in ihrem Inneren.*

(Ist der kritische Punkt reell ($b = 0$), so zerfällt die Hyperbel $H(a + ib)$ in zwei durch den kritischen Punkt a hindurchgehende senkrechte Geraden, für welche die reelle Achse die eine Winkelhalbierende ist. Das Äußere bzw. Innere dieser entarteten Hyperbel ist derjenige von den zwei Geraden begrenzte Doppelwinkelraum, dessen Winkelhalbierende die reelle Achse ist bzw. zu der imaginären Achse parallel ist.)

Ist nämlich $K \geqq 0$, so hat die Summe von (6) mindestens ein nichtpositives Glied. Die Funktion $F(z)$ hat also mindestens ein Paar nichtreeller Nullstellen $x_k + iy_k$ und $x_k - iy_k$, für welche $U(x_k, y_k) \leqq 0$ ist. Die Nullstellen $x_k + iy_k$ und $x_k - iy_k$ liegen also auf der Hyperbel

$$U(x, y) \equiv (x - a)^2 - y^2 + b^2 = 0 \tag{10}$$

oder in ihrem Inneren. Damit ist der Satz II bewiesen.

Hat die Summe von (6) keine negativen Glieder, so hat sie nur verschwindende Glieder, falls $a + ib$ ein kritischer Punkt ist. In diesem Falle ist $K = 0$ und $\gamma = 0$, und es liegen alle Nullstellen von $F(z)$ auf der Hyperbel $H(a + ib)$.

Der Satz II gilt ohne weiteres auch für die erhöhten, sogar auch für die erweiterten kritischen Punkte (für welche $K + 2\gamma \geqq 0$ bzw. $K + 2\gamma + \Sigma_1 \geqq 0$ ist).

Der Satz II läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

III. *Ist H_k die Hyperbel, deren Scheitelpunkte konjugiert komplexe kritische Punkte k-ter Ordnung in bezug auf eine Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* sind und deren Nebenachse $\sqrt{k}$-mal so groß ist wie die Hauptachse, so hat die Funktion $F(z)$ immer nichtreelle Nullstellen im Inneren von H_k oder auf H_k*[5]).

---

[4]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der Sätze I, II und VIII der Arbeit N, S. 134—135, 140.

[5]) Der Beweis dieses Satzes geschieht ebenso, wie der Beweis der Sätze III—V in der Arbeit N, S. 135—136.

Die Sätze II und III sind analog zu den Sätzen, die von J. L. W. V. Jensen ausgesprochen[6]) und vom Verfasser bewiesen und verallgemeinert wurden[7]).

Es gilt nämlich unter anderem der Satz:

Jede nichtreelle Nullstelle der k-ten Ableitung $F^{(k)}(z)$ einer Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* liegt im Innern oder auf dem Rande mindestens einer Jensenschen Ellipse k-ter Art. Eine *Jensensche Ellipse k-ter Art* hat die Verbindungsstrecke eines konjugiert komplexen Nullstellenpaares von $F(z)$ zur Nebenachse, ihre Hauptachse ist $\sqrt{k}$-mal so groß. Eine Jensensche Ellipse erster Art ist ein Kreis, ein *Jensenscher Kreis.*

Es gelten die folgenden Sätze[8]):

IV. *Jeder kritische Punkt in bezug auf eine Funktion vom Geschlecht* 1* *liegt im Innern oder auf dem Rande mindestens eines Jensenschen Kreises der Funktion.*

V. *Jeder kritische Punkt k-ter Ordnung in bezug auf eine Funktion vom Geschlecht* 1* *liegt im Innern oder auf dem Rande mindestens einer Jensenschen Ellipse k-ter Art in bezug auf die Funktion.*

(Auch diese Sätze gelten für die erhöhten und erweiterten kritischen Punkte.)

Ist nämlich $a + ib$ ein kritischer Punkt der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*, so hat die Funktion $F(z)$ nach dem Satze II immer solche Nullstellen $x_k \pm i y_k$, für die

$$U(x_k, y_k) = (x_k - a)^2 - y_k^2 + b^2 \leqq 0$$

ist. Daraus folgt, daß der kritische Punkt $a + ib$ im Innern oder auf dem Rande des Jensenschen Kreises

$$(x - x_k)^2 + y^2 - y_k^2 = 0$$

liegt.

Hat die Funktion $F(z)$ im Punkte $a + ib$ einen kritischen Punkt *k-ter* Ordnung, so hat die Funktion $F(z)$ nach dem Satze III immer solche Nullstellen $x_k \pm i y_k$, für welche

$$(x_k - a)^2 - k y_k^2 + k b^2 \leqq 0$$

ist. Der kritische Punkt k-ter Ordnung $a + ib$ liegt also im Innern oder auf dem Rande der Jensenschen Ellipse k-ter Art

$$(x - x_k)^2 + k y^2 - k y_k^2 = 0.$$

Damit sind die Sätze IV und V bewiesen.

§ 4. Ungleichungen für die nichtreellen Nullstellen einer Funktion vom Geschlecht 1*.

Faßt man in der Summe Σ_2 der Gleichung (8) die gleichen Glieder, die sich auf konjugiert komplexe Nullstellen der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* beziehen, zusammen, so ist

$$\Sigma_2 = 2\,\Sigma_+ + 2\,\Sigma_- + 2\,\Sigma_0, \tag{11}$$

wo $2\Sigma_+$, $2\,\Sigma_-$ bzw. $2\,\Sigma_0$ die Summe der positiven, negativen bzw. verschwindenden Glieder von Σ_2 bedeutet. Das Glied der Summe Σ_+, Σ_- oder Σ_0, das sich auf das konjugiert komplexe Nullstellenpaar $x_k \pm i y_k$ von $F(z)$ bezieht, hat die Form

$$\frac{U(x_k, y_k)}{U^2(x_k, y_k) + V^2(x_k, y_k)} = \frac{(x_k - a)^2 - y_k^2 + b^2}{[(x_k - a)^2 - y_k^2 + b^2]^2 + 4(x_k - a)^2 y_k^2}. \tag{12}$$

[6]) Recherches sur la théorie des équations, Acta Math. **36** (1913), S. 190.

[7]) Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. **31** (1922), S. 250—251.

[8]) Diese Sätze sind Verallgemeinerungen der Sätze IX, X und XII von N, S. 140—141. Vgl. auch die zweite Arbeit von G. Pólya, a. a. O. [2]).

Liegt also die Nullstelle $x_k + iy_k$ oder $x_k - iy_k$ im Inneren bzw. im Äußeren der Hyperbel $H(a + ib)$ (mit der Gleichung $U(x, y) = 0$), so ist das Glied (12) negativ bzw. positiv. Liegt aber der Punkt $x_k + iy_k$ auf der Hyperbel $H(a + ib)$, so verschwindet das entsprechende Glied (12).

Auf Grund der eingeführten Bezeichnungen läßt sich die Gleichung (3) oder (8) folgendermaßen schreiben:

$$S \equiv K + 2\gamma + \Sigma_1 + 2\Sigma_+ = -2\Sigma_-, \tag{13}$$

wo die Glieder der Summen auf der linken Seite der Gleichung und die mit -1 multiplizierten Glieder der Summe der rechten Seite positiv sind.

Auf der linken Seite von (13) kann nur der kritische Wert K negativ sein. Ist aber $a + ib$ ein gewöhnlicher, erhöhter bzw. erweiterter kritischer Punkt, so ist $S \geqq 0$, weil in diesen drei Fällen $K \geqq 0$, $K + 2\gamma \geqq 0$ bzw. $K + 2\gamma + \Sigma_1 \geqq 0$ ist.

Ist $a + ib$ ein modifizierter kritischer Punkt, so ist $K < 0$ und

$$K^* = -K - 2\gamma - \Sigma_1 > 0.$$

In diesem Falle läßt sich die Gleichung (13) auf folgende Weise schreiben:

$$S^* \equiv K^*(a + ib) - 2\Sigma_- = 2\Sigma_+, \tag{14}$$

wo die Glieder auf beiden Seiten nichtnegativ sind.

Wir nehmen an, die Summe Σ_- habe q Glieder. In diesem Falle liegen $2q$ nichtreelle Nullstellen von $F(z)$ im Inneren der Hyperbel $H(a + ib)$, von denen je zwei konjugiert komplex sind. Ordnen wir die Summe $-\Sigma_-$ nach abnehmender Größe ihrer Glieder und schreiben wir den aufeinanderfolgenden Gliedern die Indizes $1, 2, \ldots, q$ zu, so hat die Gleichung (13) die Form

$$S \equiv K + 2\gamma + \Sigma_1 + 2\Sigma_+ = 2\left(\frac{-U_1}{U_1^2 + V_1^2} + \frac{-U_2}{U_2^2 + V_2^2} + \cdots + \frac{-U_q}{U_q^2 + V_q^2}\right), \tag{15}$$

wo

$$U_k \equiv U(x_k, y_k), \qquad V_k \equiv V(x_k, y_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{16}$$

und

$$\frac{-U_1}{U_1^2 + V_1^2} \geqq \frac{-U_2}{U_2^2 + V_2^2} \geqq \cdots \geqq \frac{-U_q}{U_q^2 + V_q^2} > 0 \tag{17}$$

ist.

Aus der Gleichung (15) lassen sich mehrere Ungleichungen ableiten, von denen die Ungleichung

$$S \leqq 2q\,\frac{-U_1}{U_1^2 + V_1^2} \quad \text{oder} \quad U^2(x_1, y_1) + V^2(x_1, y_1) + 2\,\frac{q}{S}\,U(x_1, y_1) \leqq 0 \tag{18}$$

die einfachste ist. In dieser Ungleichung steht das Gleichheitszeichen nur dann, wenn die q Glieder in der Klammer von (15) alle gleich sind.

Ist $a + ib$ ein modifizierter kritischer Punkt der Funktion $F(z)$, hat die Funktion $2q$ nichtreelle Nullstellen im Äußeren der Hyperbel $H(a + ib)$ und ist dasjenige Glied der Summe Σ_+ das größte, welches zu den nichtreellen Nullstellen $x_1 \pm iy_1$ von $F(z)$ gehört, so kann man aus der Gleichung (14) die Ungleichung

$$S^* \equiv K^* - 2\Sigma_- \leqq 2q\,\frac{U(x_1, y_1)}{U(x_1, y_1) + V(x_1, y_1)} \tag{19}$$

oder die Ungleichung

$$U^2(x_1, y_1) + V^2(x_1, y_1) - 2\frac{q}{S^*}U(x_1, y_1) \leqq 0 \tag{20}$$

folgern.

§ 5. Über Cassinische Kurven.

Die Ungleichungen (18) und (20) haben die Form

$$U^2(x, y) + V^2(x, y) + 2p\,U(x, y) \leqq 0, \tag{21}$$

wo der Parameter p eine reelle Zahl bedeutet.

Ist $z = x + iy$ und

$$(z - a)^2 + b^2 + p \equiv (z - \beta_1)(z - \beta_2), \tag{22}$$

so ist

$$(z - \beta_1)(z - \beta_2) \equiv U(x, y) + p + i\,V(x, y).$$

Daraus folgt, daß die Ungleichung (21) sich in der Form

$$[U(x, y) + p]^2 + V^2(x, y) \equiv |(z - a)^2 + b^2 + p|^2 \equiv |(z - \beta_1)(z - \beta_2)|^2 \leqq p^2 \tag{23}$$

schreiben läßt.

Die dieser Ungleichung genügenden z-Punkte der komplexen Ebene liegen im Innern oder auf dem Rande der Cassinischen Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen bzw. bipolaren Koordinaten

$$U^2(x, y) + V^2(x, y) + 2p\,U(x, y) \equiv U(x, y)[U(x, y) + 2p] + V^2(x, y) = 0 \tag{24}$$

bzw.

$$|(z - \beta_1)(z - \beta_2)| \equiv |(z - a)^2 + b^2 + p| \leqq |p| \tag{25}$$

ist.

Die Pole β_1 und β_2 sind Brennpunkte der Kurve, der Punkt $a = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ ist der Mittelpunkt der Kurve.

Diese Kurve wird im folgenden mit $C(a + ib;\ p)$ bezeichnet werden. Eine Kurve $C(a + ib;\ p)$ mit negativem Parameter $p = -p^*$ wird auch mit $C^*(a + ib;\ p^*)$ bezeichnet werden.

Aus der Gleichung (24) folgt, daß in einem Punkt (x, y) der Kurve $C(a + ib;\ p)$

$$U(x, y) \cdot [U(x, y) + 2p] \leqq 0$$

ist. Die Kurve liegt also auf entgegengesetzten Seiten der Hyperbeln

$$U(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad U(x, y) + 2p = 0.$$

Ist $p > 0$ bzw. $p < 0$, so liegt die Kurve $C(a + ib;\ p)$ im Inneren bzw. Äußeren der Hyperbel $U(x, y) = 0$ [dies ist die Hyperbel $H(a + ib)$] und im Äußeren bzw. Inneren der Hyperbel $U(x, y) + 2p = 0$.

Jede Kurve $C(a + ib;\ p)$ geht durch die Punkte $a + ib$ und $a - ib$ der komplexen Ebene, weil die Funktionen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ in den Punkten (a, b) und $(a, -b)$ verschwinden.

Haben p_1 und p_2 dasselbe Vorzeichen und ist $|p_1| > |p_2|$, so liegt die Kurve $C(a + ib;\ p_2)$ innerhalb der Kurve $C(a + ib;\ p_1)$.

Die Gleichung der Kurve $C(a + ib;\ p_2)$ läßt sich nämlich in der Form

$$\begin{aligned} U^2(x, y) + V^2(x, y) + 2p_2U(x, y) = U^2(x, y) + V^2(x, y) + 2p_1U(x, y) \\ + 2(p_2 - p_1)U(x, y) = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

schreiben. In einem Punkte (x_2, y_2) der Kurve $C(a + ib;\ p_2)$ sind $U(x_2, y_2) \leqq 0$ und

$p_2 - p_1 < 0$ bzw. $U(x_2, y_2) \geqq 0$ und $p_2 - p_1 > 0$, falls $p_1 > 0$ bzw. $p_1 < 0$ ist. In beiden Fällen ist also $(p_2 - p_1)U(x_2, y_2) \geqq 0$ und auf Grund der Gleichung (26)

$$U^2(x_2, y_2) + V^2(x_2, y_2) + 2p_1U(x_2, y_2) \leqq 0.$$

Die Kurven $C(a + ib; p)$ nähern sich der Hyperbel $H(a + ib)$, wenn der absolute Betrag von p wächst, weil

$$U(x, y) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{2p} [U^2(x, y) + V^2(x, y) + 2pU(x, y)]$$

ist.

Wir können auf Grund der bisherigen Sätze die folgenden aussprechen:

VI. *Eine Kurve $C(a + ib; p)$ mit positivem Parameter p liegt ganz im Inneren der gleichseitigen Hyperbel $H(a + ib)$, hat die Brennpunkte $(a, \pm\sqrt{b^2 + p})$ und besteht aus zwei Ovalen. Die Hyperbel $H(a + ib)$ wird in ihren Scheitelpunkten (a, b) und $(a, -b)$ von der Kurve $C(a + ib; p)$ berührt. Die Punkte $(a, \pm\sqrt{b^2 + 2p})$ liegen auf der Kurve $C(a + ib; p)$ und haben den größten Abstand von ihrem Mittelpunkte $(a, 0)$. Ist $p_1 > p_2 > 0$, so liegt je ein Oval der Kurve $C(a + ib; p_2)$ innerhalb je eines Ovales von $C(a + ib; p_1)$.*

VII. *Eine Kurve $C(a + ib; p)$ mit negativem Parameter p liegt ganz im Äußeren der Hyperbel $H(a + ib)$, von der sie in den Scheitelpunkten $(a, \pm b)$ berührt wird. Ist $0 > 2p \geqq -b^2$, so haben die Punkte $(a, \pm\sqrt{b^2 + 2p})$ auf der Kurve $C(a + ib; p)$ den Minimalabstand vom Mittelpunkte, und die Kurve besteht aus zwei Ovalen, die keinen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse haben. Ist $2p = -b^2$, so ist die Kurve eine Bernoullische Lemniskate. Ist $2p < -b^2$, so hat die Kurve nur einen Zug, dessen Inneres die Strecke zwischen den Punkten $(a - \sqrt{-2p - b^2}, 0)$ und $(a + \sqrt{-2p - b^2}, 0)$ in sich enthält. Die Kurve $C(a + ib; -b^2)$ zerfällt in den zweifach zu rechnenden Kreis mit dem Mittelpunkte $(a, 0)$ und mit dem Halbmesser $|b|$. Die Brennpunkte der Kurve $C(a + ib; p)$ mit negativem Parameter haben die Koordinaten $(a, \pm\sqrt{b^2 + p})$ bzw. $(a \pm \sqrt{-p - b^2}, 0)$, je nachdem $b^2 + p \geqq 0$ bzw. $b^2 + p < 0$ ist.*

Der Bereich der Punkte der komplexen Ebene, die innerhalb oder auf dem Rande einer Cassinischen Kurve $C(a + ib; p)$ bzw. $C^*(a + ib; p)$ liegen, wird im folgenden mit $B(a + ib; p)$ bzw. $B^*(a + ib; p)$ bezeichnet.

§ 6. Über die Abgrenzung der nichtreellen Nullstellen einer Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* durch Cassinische Kurven.

Aus der Gleichung (15) folgen die Ungleichungen

(27) $$S \geqq K, \; S \geqq 2\gamma \text{ und } S \geqq K + 2\gamma.$$

Aus der Ungleichung (18) folgen also die Sätze:

VIII. *Ist K der kritische Wert der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* im kritischen Punkte $a + ib$ und hat die Funktion höchstens $2q$ Nullstellen im Inneren der Hyperbel $H(a + ib)$, so hat sie mindestens ein Paar nichtreeller Nullstellen im Bereiche $B\left(a + ib; \frac{q}{K}\right)$. Die Funktion $F(z)$ hat nur dann keine Nullstelle im Innern dieses Bereiches, wenn sie vom Exponenten Null ist und wenn sie $2q$ Nullstellen auf der Cassinischen Kurve $C\left(a + ib; \frac{q}{K}\right)$ hat.*

IX. *Ist $a + ib$ ein kritischer Punkt der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* und vom Exponenten γ und liegen höchstens $2q$ Nullstellen von $F(z)$ im Inneren der Hyperbel*

$H(a+ib)$, so hat die Funktion im Bereiche $B\left(a+ib; \frac{q}{2\gamma}\right)$ immer Nullstellen. Im Innern dieses Bereiches hat die Funktion $F(z)$ nur dann keine Nullstelle, wenn sie $2q$ Nullstellen auf der Cassinischen Kurve $C\left(a+ib; \frac{q}{2\gamma}\right)$ und ihre übrigen Nullstellen auf der Hyperbel $H(a+ib)$ hat und wenn der kritische Wert im Punkte $a+ib$ verschwindet.

X. *Ist K der kritische Wert der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* und vom Exponenten γ im kritischen Punkte $a+ib$ und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen im Inneren der Hyperbel $H(a+ib)$, so verschwindet sie mindestens zweimal im Bereiche $B\left(a+ib; \frac{2q}{K+2\gamma}\right)$. Im Innern dieses Bereiches hat die Funktion $F(z)$ nur dann keine Nullstellen, wenn sie auf dem Rande $2q$ Nullstellen hat und wenn ihre übrigen Nullstellen alle auf der Hyperbel $H(a+ib)$ liegen.*

Dieser Satz gilt auch für erhöhte kritische Punkte.

Ist x_k eine reelle Nullstelle der Funktion $F(z)$, so ist das entsprechende Glied von Σ_1 in der Gleichung (15)

$$\frac{1}{(x_k-a)^2+b^2}=\frac{1}{d_k^2},$$

wo d_k den Abstand des Punktes $a+ib$ vom Punkte x_k bezeichnet.

Hat also die Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* mindestens r solche reellen Nullstellen, deren Abstände vom Punkte $a+ib$ nicht größer als d sind, so ist in Gleichung (15)

$$S \geqq \Sigma_1 \geqq \frac{r}{d^2}, \text{ falls } K+2\gamma \geqq 0 \tag{28}$$

ist.

Aus der Ungleichung (18) folgt also der Satz:

XI. *Ist $a+ib$ einer kritischer oder ein erhöhter kritischer Punkt der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1*, hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen im Inneren der Hyperbel $H(a+ib)$ und mindestens r solche reellen Nullstellen, deren Abstände vom kritischen Punkte $a+ib$ nicht größer als d sind, so enthält der Bereich $B\left(a+ib; \frac{q}{r}d^2\right)$ mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$. Das Innere dieses Bereiches enthält nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn a) die Summe des kritischen Wertes im Punkte $a+ib$ und des zweifachen Exponenten von $F(z)$ gleich Null ist, b) die Funktion $F(z)$ nur r reelle Nullstellen hat, die in den von $a+ib$ im Abstande d liegenden zwei Punkten der reellen Achse zusammenfallen, c) die Funktion $F(z)$ genau $2q$ Nullstellen auf der Cassinischen Kurve $C\left(a+ib; \frac{q}{r}d^2\right)$ und die übrigen Nullstellen alle auf der Hyperbel $H(a+ib)$ hat.*

Die vorigen vier Sätze sind im folgenden Satze enthalten:

XII. *Ist K der kritische Wert der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* und vom Exponenten γ im erweiterten kritischen Punkte $a+ib$, hat ferner die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ Nullstellen an der inneren Seite der Hyperbel $H(a+ib)$ und mindestens r solche reellen Nullstellen, deren Abstände vom Punkte $a+ib$ nicht größer als d sind, und ist endlich $K+2\gamma+\frac{r}{d^2}>0$, so enthält der Bereich $B\left(a+ib; \frac{qd^2}{(K+2\gamma)d^2+r}\right)$ mindestens zwei Nullstellen von $F(z)$. Im Innern dieses Bereiches liegt nur dann keine Nullstelle von $F(z)$, wenn die Funktion auf dem Rande des Bereiches $2q$ Nullstellen und auf der reellen Achse nur r Nullstellen hat, die in den vom Punkte $a+ib$ im Abstande d liegenden zwei Punkten*

der reellen Achse zusammenfallen, und wenn die übrigen nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ alle auf der Hyperbel $H(a+ib)$ liegen.

Aus der Gleichung (15) ergeben sich auch die folgenden Ungleichungen

$$(29) \qquad S \geqq 2q \frac{-U_q}{U_q^2+V_q^2} \quad \text{oder} \quad U^2(x_q, y_q) + V^2(x_q, y_q) + 2\frac{q}{S} U(x_q, y_q) \geqq 0,$$

$$(30) \qquad S \geqq 2 \frac{-U_1}{U_1^2+V_1^2} \quad \text{oder} \quad U^2(x_1, y_1) + V^2(x_1, y_1) + 2\frac{1}{S} U(x_1, y_1) \geqq 0.$$

Ist $a+ib$ ein erweiterter kritischer Punkt der Funktion $F(z)$, hat die Funktion keine nichtreelle Nullstelle im Äußeren der Hyperbel $H(a+ib)$, höchstens aber r reelle Nullstellen und haben diese reellen Nullstellen mindestens den Abstand d vom Punkte $a+ib$, so ist

$$(31) \qquad S = K + 2\gamma + \Sigma_1 + 2\Sigma_+ \leqq K + 2\gamma + \frac{r}{d^2}.$$

Daraus folgt auf Grund der Ungleichungen (29) und (30) der Satz:

XIII. *Hat die Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* und vom Exponenten γ im erweiterten kritischen Punkte $a+ib$ den kritischen Wert K, hat ferner die Funktion im Äußeren der Hyperbel $H(a+ib)$ keine nichtreelle Nullstelle, im Inneren aber höchstens $2q$ Nullstellen und hat endlich die Funktion höchstens r reelle Nullstellen, so hat die Funktion $F(z)$ außerhalb vom Innern des Bereiches $B\left(a+ib; \frac{qd^2}{(K+2\gamma)d^2+r}\right)$ noch nichtreelle Nullstellen, sie kann aber im Innern des Bereiches $B\left(a+ib; \frac{d^2}{(K+2\gamma)d^2+r}\right)$ keine Nullstelle haben. Hier bedeutet d den Minimalabstand der reellen Nullstellen von $F(z)$ vom Punkte $a+ib$.*

In der Ungleichung (19) ist $S^* = K^* - 2\Sigma_- \geqq K^*$, aus der Ungleichung (20) folgt also der Satz:

XIV. *Ist K^* der modifizierte kritische Wert der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* im modifizierten kritischen Punkt $a+ib$ und hat die Funktion $F(z)$ höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen im Äußeren der Hyperbel $H(a+ib)$, so hat sie mindestens zwei nichtreelle Nullstellen im Bereiche $B^*\left(a+ib; \frac{q}{K^*}\right)$. Im Innern dieses Bereiches hat die Funktion nur dann keine nichtreellen Nullstellen, wenn sie $2q$ Nullstellen auf der Cassinischen Kurve $C^*\left(a+ib; \frac{q}{K^*}\right)$ hat und wenn ihre übrigen nichtreellen Nullstellen alle auf der Hyperbel $H(a+ib)$ liegen.*

Aus diesem Satze folgt der folgende:

XV. *Es sei $a+ib$ ein modifizierter kritischer Punkt der Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 1* und vom Exponenten γ, die höchstens r reelle Nullstellen hat; es sei d der Minimalabstand dieser reellen Nullstellen vom Punkte $a+ib$ und es sei $M = -K - 2\gamma - \frac{r}{d^2} > 0$. Hat nun die Funktion höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen im Äußeren der Hyperbel, so hat sie immer nichtreelle Nullstellen im Bereiche $B^*\left(a+ib; \frac{q}{M}\right)$. Im Innern dieses Bereiches hat die Funktion nur dann keine Nullstellen, wenn sie auf dem Rande $2q$ Nullstellen und in den vom Punkte $a+ib$ im Abstande d liegenden Punkten der reellen Achse zusammen r Nullstellen hat und wenn die übrigen Nullstellen alle auf der Hyperbel $H(a+ib)$ liegen.*

Dieser Satz gilt auch dann, wenn man d durch $|b|$ ersetzt.
Man kann leicht auch weitere Sätze aussprechen.

§ 7. Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten.

Aus dem Satze VIII folgen die Sätze:

XVI. *Hat das reelle Polynom $f(z)$ höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen und ist K der kritische Wert von $f(z)$ im kritischen Punkte $a + ib$, so hat das Polynom immer Nullstellen im Bereiche $B\left(a + ib; \frac{q}{K}\right)$. Im Innern dieses Bereiches hat das Polynom $f(z)$ nur dann keine nichtreelle Nullstelle, wenn es vom Grade $2q$ ist und wenn seine Nullstellen alle auf der Cassinischen Kurve $C\left(a + ib; \frac{q}{K}\right)$ liegen.*

XVII. *Hat das reelle Polynom n-ten Grades $f(z)$ im kritischen Punkte $a + ib$ den kritischen Wert K, so hat es nichtreelle Nullstellen im Bereiche $B\left(a + ib; \frac{n}{K}\right)$, für ungerade n sogar im Bereiche $B\left(a + ib; \frac{n-1}{K}\right)$.*

XVIII. *Hat das reelle Polynom $f(z)$ höchstens $2q$ nichtreelle Nullstellen und mindestens r solche reellen Nullstellen, deren Abstände vom kritischen Punkte $a + ib$ höchstens d ist, und ist K der kritische Wert von $f(z)$ im Punkte $a + ib$, so liegen Nullstellen von $F(z)$ in den Bereichen $B\left(a + ib; \frac{q}{r}\, d^2\right)$ und $B\left(a + ib; \frac{q d^2}{K d^2 + r}\right)$.*

Aus dem Satze XV ergibt sich der folgende:

XIX. *Nimmt das reelle Polynom n-ten Grades $f(z)$ mit r reellen Nullstellen im Punkte $a + ib$ der komplexen Ebene den negativen kritischen Wert K an und ist $M = -K - \frac{r}{d^2} > 0$, wo d den Minimalabstand der reellen Nullstellen vom Punkte $a + ib$ bedeutet, so hat das Polynom (nichtreelle) Nullstellen im Bereiche $B^*\left(a + ib; \frac{n-r}{M}\right)$.*

Es gilt auch der Satz:

XX. *Hat das reelle Polynom n-ten Grades $f(z)$ mit lauter reellen Nullstellen im Punkte $a + ib$ den kritischen Wert K, so ist $0 < -K \leqq \frac{n}{b^2}$.*

Das Polynom $f(z)$ hat keine nichtreelle Nullstelle, sein kritischer Wert K ist also in jedem nichtreellen Punkte negativ. Gäbe es einen Punkt $a + ib$ $(b \neq 0)$, wo der kritische Wert der Ungleichung $-K > \frac{n}{b^2}$ genügt, so wäre auf Grund der Gleichung (15)

$$2\Sigma_+ = -K - \Sigma_1 - 2\Sigma_- \geqq -K - \Sigma_1 \geqq -K - \frac{n}{b^2} > 0.$$

Die Summe Σ_+ hätte also mindestens ein positives Glied und damit das Polynom $f(z)$ auch nichtreelle Nullstellen. Aus diesem Widerspruch folgt der Satz XX.

Das Gleichheitszeichen gilt im Satze XX offenbar nur dann, wenn $f(z) = c\,(z - a)^n$ ist.

Auch für reelle Nullstellen gilt der folgende Satz:

XXI. *Ist $K(\neq 0)$ der kritische Wert des reellen Polynoms n-ten Grades $f(z)$ im*

Punkt $a + ib$, *so hat das Polynom mindestens eine Nullstelle im Bereiche* $B\left(a + ib; \frac{n}{2K}\right)$ *bzw.* $B^*\left(a + ib; \frac{n}{-K}\right)$, *je nachdem* $K > 0$ *bzw.* $K < 0$ *ist.*

Für negatives K folgt dieser Satz aus der Ungleichung

$$\Sigma_1 + 2\Sigma_+ = -K - 2\Sigma_- \geqq -K > 0\,.$$

Ist nämlich $\frac{U_1}{U_1^2 + V_1^2}$ das größte Glied der Summen Σ_1 und Σ_+, so ist

$$n\,\frac{U_1}{U_1^2 + V_1^2} \geqq -K, \text{ woraus } U^2(x_1, y_1) + V^2(x_1, y_1) + \frac{n}{K}\,U(x_1, y_1) \leqq 0$$

folgt.

Eingegangen 24. Februar 1934.

Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper.

Von *Helmut Hasse* in Marburg.

Artin hat in seiner Dissertation die arithmetische und analytische Theorie der quadratischen algebraischen Funktionenkörper bei endlichem Konstantenkörper entwickelt [1]). Er hat damit den Anstoß gegeben zu einer arithmetischen und analytischen Theorie der allgemeinen algebraischen Funktionenkörper bei endlichem Konstantenkörper, die von F. K. Schmidt weitgehend durchgeführt worden ist [2]). Ich behandle im folgenden auf diesen Grundlagen die arithmetische und analytische Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper bei endlichem Konstantenkörper.

1. Als *Grundkörper* sei ein *beliebiger algebraischer Funktionenkörper K einer Unbestimmten* zunächst über einem beliebigen *vollkommenen Konstantenkörper k* der Charakteristik $p\,(=0$ oder Primzahl) zugrunde gelegt, also eine separabel-algebraische Erweiterung endlichen Grades einer einfach-transzendenten Erweiterung von k, bei der k innerhalb K algebraisch-abgeschlossen ist [3]). Ich betrachte einen *separablen zyklischen Erweiterungskörper Z über K* und zwar beschränke ich mich auf die beiden folgenden Fälle für den Grad n von Z über k:

a) $n \not\equiv 0 \bmod. p$ — für $p = 0$ ist das stets der Fall — und k enthält die n-ten Einheitswurzeln; für endliche Körper k von q Elementen bedeutet das $q \equiv 1 \bmod. n$.

b) $n = p$ bei $p \neq 0$ [4]).

---

[1]) E. Artin, Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen, I und II, Math. Zeitschr. **19** (1924). — Die dort innegehaltene Beschränkung auf die endlichen Primkörper (Restklassenkörper mod. p) als Konstantenkörper ist unwesentlich.

[2]) F. K. Schmidt, 1. Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen, Dissertation, Erlangen 1925.

2. Zur Zahlentheorie in Körpern von der Charakteristik p, Sitzungsberichte Erlangen **58/59** (1925).

3. Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **33** (1931).

4. Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Koeffizientenbereich, Sitzungsberichte Erlangen **62** (1930).

Im folgenden zitiert mit Schm. und Nummer.

[3]) Für die allgemeine arithmetische Grundlegung ist die von F. K. Schmidt innegehaltene Beschränkung auf endliche Konstantenkörper oder auch nur auf absolut-algebraische Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik p statt beliebiger vollkommener Konstantenkörper unwesentlich. Siehe dazu auch die Bemerkungen in § 1 meiner Schm. 3 ergänzenden Note: Über die Kongruenzzetafunktionen, Sitzungsberichte Berlin 1934; im folgenden zitiert mit H. I.

[4]) Für den allgemeinen Fall $n = p^\nu$ wäre die Verallgemeinerung der Artin-Schreierschen Theorie der zyklischen Erweiterungen p-ten Grades über Körpern der Primzahlcharakteristik p (E. Artin und O. Schreier, Über eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, Abhandl. Math. Sem. Hamburg **5** (1927)) auf beliebigen Primzahlpotenzgrad p^ν heranzuziehen. A. A. Albert hat mir kürzlich eine Durchführung dieser Verallgemeinerung mitgeteilt. Da diese jedoch durchweg mit der Zerlegung in ν Schritte p-ten Grades arbeitet, konnte ich daraus nicht ohne weiteres zu einer Theorie gelangen, die von vornherein die relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper vom Grade p^ν behandelt. Natürlich kann eine solche Theorie aus der hier für den Grad p entwickelten durch Iteration unter Verwendung der Albertschen Resultate aufgebaut werden.

Um die formale Analogie beider Fälle a) und b) möglichst hervortreten zu lassen, führe ich die Untersuchungen parallel auf der linken und rechten Hälfte der Druckseite durch. Über die ganze Breite der Druckseite erstreckter Text bezieht sich dabei, wenn nichts anders gesagt ist, auf beide Fälle gleichzeitig.

2. Nach der *algebraischen Theorie* der Kummerschen Körper bzw. der oben zitierten Artin-Schreierschen Theorie bestehen dann die folgenden Tatsachen:

Der separable zyklische Erweiterungskörper Z vom Grade n über K ist in der Form

$$(1) \qquad Z = K(y)$$

erzeugbar mit

(2) $y^n = B,$	$y^p - y = B,$

wo B ein Element aus K und

(3) $B \not\equiv B_0^d \ (d \mid n, d > 1)$	$B \not\equiv B_0^p - B_0$

mit B_0 aus K ist. Die galoissche Gruppe von Z/K wird dargestellt durch die Substitutionen:

(4) $y \to y\zeta^\nu$ (ν mod. n) (ζ^ν durchläuft die n-ten Einheitswurzeln in k).	$y \to y + \nu$ (ν mod. p) (ν durchläuft sozusagen die „p-ten Nullteile“ in k).

Die Gesamtheit der Erzeugungen (1), (2) von Z/K entsteht durch die Substitutionen:

(5) $y \to y^\varkappa B_0$ $B \to B^\varkappa B_0^n$ $(\varkappa, n) = 1, \ B_0 \not\equiv 0$ aus K.	$y \to \varkappa y + B_0$ $B \to \varkappa B + (B_0^p - B_0)$ $(\varkappa, p) = 1, \ B_0$ beliebig aus K.

Umgekehrt liefert jedes (3) genügende B aus K in der Form (1), (2) einen separablen zyklischen Körper Z/K vom Grade n.

Damit der algebraische Funktionenkörper Z einer Unbestimmten den Körper k selbst (und nicht eine echte algebraische Erweiterung von k) als Konstantenkörper hat, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung (2) absolut-irreduzibel, d. h. in $\bar{K} = K\bar{k}$ irreduzibel ist, wo $\bar{k}$ die algebraisch-abgeschlossene Hülle von k bezeichnet. Die Bedingung dafür ist, daß über (3) hinaus auch

(3′) $B \not\equiv b B_0^d \ (d \mid n, d > 1)$	$B \not\equiv b + (B_0^p - B_0)$

mit b aus k und B_0 aus K ist.

Ist speziell K *vom Geschlecht* 0, also als rationaler Funktionenkörper $K = k(x)$ über k darstellbar (siehe dazu H. I, Satz 3), so kann man B durch Substitutionen (5) mit $\varkappa = 1$ in die folgende durch die Primdivisorpotenzzerlegung in K beschriebene *reduzierte Form* bringen:

(6) $B \cong \dfrac{\mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r}}{\mathfrak{p}_\infty^l}$, $0 < \lambda_i < n$, $\mathfrak{p}_\infty$ beliebiger von den $\mathfrak{p}_i$ verschiedener Primdivisor 1. Grades, $l = \sum_{i=1}^{r} l_i \lambda_i$, wo l_i der Grad von $\mathfrak{p}_i$.	$B \cong \dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r}}$, $\lambda_i > 0, \ \lambda_i \not\equiv 0 \bmod p$, $\mathfrak{g}$ zu den $\mathfrak{p}_i$ primer ganzer Divisor.

Man zeichne dazu eine beliebige Erzeugende x von K aus, deren Nennerprimdivisor $\mathfrak{p}_\infty$ sei. Die Primdivisoren $\mathfrak{p} \not\equiv \mathfrak{p}_\infty$ vom Grade m von K entsprechen dann vermöge $\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty^m} = P$ umkehrbar eindeutig den normierten Primpolynomen vom Grade m in x.

Im Falle $n \equiv 0 \bmod. p$ erhält man dann die reduzierte Form (6) in geläufiger Weise, indem man die Exponenten in der Zerlegung von B in ein Potenzprodukt von Primpolynomen in x durch Substitutionen (5) mit $\varkappa = 1$ auf das kleinste nicht-negative Restsystem mod. n reduziert.

Im Falle $n = p$ gehe man von der Partialbruchzerlegung

$$B = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\lambda > 0} \frac{R_\lambda}{P^\lambda} + \sum_{\lambda \geqq 0} r_\lambda x^\lambda$$

aus, wo die R_λ reduzierte Reste mod. $\mathfrak{p}$ (also Polynome in x von niedrigerem Grade als P) und die r_λ reduzierte Reste mod. $\mathfrak{p}_\infty$ (also Konstante) sind. Hat einer der zu den $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\infty$ gehörigen Hauptteile ein höchstes Glied $\frac{R}{P^{\lambda_0 p}}$ von durch p teilbarer Ordnung $\lambda_0 p$, so bestimme man zu dem Rest R mod. $\mathfrak{p}$ einen Rest R_0 mod. $\mathfrak{p}$ so, daß $R \equiv R_0^p \bmod. \mathfrak{p}$ ist. Das geht, weil k als vollkommener Körper vorausgesetzt ist und daher auch der Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ von K als algebraische Erweiterung (endlichen Grades) von k vollkommen ist. Die Substitution (5) mit $\varkappa = 1$ und $B_0 = -\frac{R_0}{P^{\lambda_0}}$ schafft dann jenes höchste Glied fort und verändert im übrigen nur die niedrigeren Glieder des zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Hauptteils sowie den zu $\mathfrak{p}_\infty$ gehörigen Hauptteil. Man kann also so erreichen, daß an Hauptteilen mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\infty$ nur noch solche übrig bleiben, deren höchstes Glied von durch p unteilbarer Ordnung λ ist. Schließlich läßt sich dasselbe Verfahren auch auf den zu $\mathfrak{p}_\infty$ gehörigen Hauptteil anwenden, ohne daß dadurch einer der übrigen Hauptteile noch verändert wird, da hier sogar $r = r_0^p$ erreichbar ist. So gelangt man zu einem B in der reduzierten Form (6).

3. Ich entwickle jetzt die *arithmetische Theorie* des Körpers Z. Das für Grundkörper K vom Geschlecht 0 im Großen durchführbare Reduktionsverfahren für B kann bei Grundkörpern K von beliebigem Geschlecht jedenfalls im Kleinen, d. h. hinsichtlich des Verhaltens von B zu einem vorgegebenen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K durchgeführt werden. Man braucht dazu das obige P nur als irgendein Primelement für $\mathfrak{p}$ zu nehmen und die Reste R aus irgendeinem Restsystem mod. $\mathfrak{p}$. Man kann also B durch eine Substitution (5) mit $\varkappa = 1$ in die *für* $\mathfrak{p}$ *reduzierte Form* bringen:

(7) $\quad B \cong \mathfrak{p}^\lambda \mathfrak{b}_0 \left(\begin{matrix} 0 \leqq \lambda < n \\ \mathfrak{b}_0 \text{ prim zu } \mathfrak{p} \end{matrix} \right).$ | $B \cong \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{p}^\lambda} \left(\begin{matrix} \lambda \geqq 0;\ \lambda \not\equiv 0 \bmod. p, \text{ falls } \lambda > 0 \\ \mathfrak{g}_0 \text{ ganz für } \mathfrak{p} \end{matrix} \right).$

a) Zerlegung und Trägheit.

Ich behandle zunächst den Fall $\lambda = 0$ in (7), der auch so gekennzeichnet werden kann: B kann durch eine Substitution (5) mit $\varkappa = 1$ in die Form

(8) $\quad B$ prim zu $\mathfrak{p}$ | B ganz für $\mathfrak{p}$

gebracht werden. Dann ist y für $\mathfrak{p}$ ganz und hat zu $\mathfrak{p}$ prime Diskriminante:

$$\prod_{\nu \neq \nu'} (y\zeta^\nu - y\zeta^{\nu'}) \cong B^{n-1}. \quad | \quad \prod_{\nu \neq \nu'} ((y + \nu) - (y + \nu')) \cong 1.$$

Also ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt in Z. Zerlegung und Trägheit von $\mathfrak{p}$ in Z bestimmen sich in geläufiger Weise aus dem Zerlegungsverhalten mod. $\mathfrak{p}$ der reduzierten Grundgleichung: Der Relativgrad f der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Z ist

der kleinste positive Exponent, für den $B' \equiv B_0^n \bmod. \mathfrak{p}$ mit B_0 aus K lösbar ist. | gleich 1 oder p, je nachdem $B \equiv B_0^p - B_0 \bmod. \mathfrak{p}$ mit B_0 aus K lösbar ist oder nicht.

Ist speziell *k ein endlicher Körper*, q seine Elementanzahl, und setzt man $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = q^m$ (absolute Norm von $\mathfrak{p}$), wenn $\mathfrak{p}$ vom Grade m, für die Restklassenanzahl mod. $\mathfrak{p}$ in K, so wird die Hilbertsche Theorie des galoisschen Relativkörpers anwendbar und liefert: Der Relativgrad f kann auch charakterisiert werden als die Ordnung des Artin-Automorphismus $S = \left(\frac{Z}{\mathfrak{p}}\right)$, d. h. desjenigen Automorphismus von Z/K, für den gilt:

$$z^S \equiv z^{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} \bmod \mathfrak{p} \text{ für alle für } \mathfrak{p} \text{ ganzen } z \text{ aus } Z.$$

Wendet man dies auf das für $\mathfrak{p}$ ganze Element y aus Z an, so ergibt sich vermöge der Darstellung (4) der galoisschen Gruppe von Z/K: Dem Artin-Automorphismus $\left(\frac{Z}{\mathfrak{p}}\right)$ ist durch die Kongruenz

$$y^{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} \equiv y \left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} \bmod \mathfrak{p} \qquad \Big| \qquad y^{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})} \equiv y + \left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} \bmod \mathfrak{p}$$

umkehrbar eindeutig und isomorph

eine n-te Einheitswurzel $\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\}$ | ein p-ter Nullteil $\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\}$

aus k zugeordnet. Dies Symbol $\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\}$ ist dann auch eindeutig charakterisiert durch die von dem Element y aus Z freie Kongruenz:

$$\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv B^{\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})-1}{n}} \bmod \mathfrak{p}$$
$$\equiv B^{\left(1+q+\cdots+\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}{q}\right)\frac{q-1}{n}} \bmod \mathfrak{p}.$$

$$\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv B + B^p + \cdots + B^{\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}{p}} \bmod \mathfrak{p}$$
$$\equiv \left(B + B^q + \cdots + B^{\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}{q}}\right)$$
$$+ \left(B + B^q + \cdots + B^{\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}{q}}\right)^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(B + B^q + \cdots + B^{\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \bmod \mathfrak{p}.$$

Es ist also

$$(9) \quad \left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} = N_{\mathfrak{p}}(B)^{\frac{q-1}{n}} \bmod \mathfrak{p}, \qquad \Big| \qquad \left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} = \mathfrak{S}(S_{\mathfrak{p}}(B)) \bmod \mathfrak{p},$$

wo $N_{\mathfrak{p}}(B)$ und $S_{\mathfrak{p}}(B)$ Norm und Spur von B im Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ von K in bezug auf den Konstantenkörper k bezeichnen und $\mathfrak{S}$ die absolute Spur in k (in bezug auf den Primkörper) bedeutet. Es ist

$$\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} = 1 \qquad \Big| \qquad \left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$$

dann und nur dann, wenn die Kongruenz

$$(10) \quad B \equiv B_0^n \bmod \mathfrak{p} \qquad \Big| \qquad B \equiv B_0^p - B_0 \bmod \mathfrak{p}$$

durch ein B_0 aus K lösbar ist, und allgemeiner ist die Ordnung von $\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\}$ gleich der Ordnung von B in bezug auf die Gruppe der B_0^n bzw. $B_0^p - B_0$ mod. $\mathfrak{p}$, also gleich dem Grad f der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in dem durch B definierten Körper Z. Nach (9) gilt ferner:

$$(11) \quad \left\{\frac{B_1 B_2}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{B_1}{\mathfrak{p}}\right\}\left\{\frac{B_2}{\mathfrak{p}}\right\}. \qquad \Big| \qquad \left\{\frac{B_1 + B_2}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{B_1}{\mathfrak{p}}\right\} + \left\{\frac{B_2}{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Es ist zweckmäßig, das Symbol $\left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\}$ durch ein weiteres ihm isomorph zuge-

ordnetes zu ersetzen, dessen Wert eine gewöhnliche n-te Einheitswurzel (der Charakteristik 0) ist. Dazu gehe ich aus von der auf der rechten Seite von (9) entstandenen Funktion

$$a^{\frac{q-1}{n}} = \zeta^{v} \qquad | \qquad \mathfrak{S}(a) = v$$

der Elemente a aus k. Diese Funktion stellt eine homomorphe Abbildung der

Multiplikationsgruppe | Additionsgruppe

von k auf die darin enthaltene Untergruppe der

n-ten Einheitswurzeln | p-ten Nullteile

dar. Fügt man dann irgendeine feste isomorphe Abbildung dieser Untergruppe auf die gewöhnlichen n-ten Einheitswurzeln an, also etwa:

$$(12)\quad a^{\frac{q-1}{n}} = \zeta^{v} \to \chi(a) = e^{\frac{2\pi i v}{n}}, \qquad | \qquad \mathfrak{S}(a) = v \to \chi(a) = e^{\frac{2\pi i v}{p}},$$

so entsteht zusammengenommen eine homomorphe Abbildung

$$(13)\quad a \to a^{\frac{q-1}{n}} \to \chi(a) \qquad | \qquad a \to \mathfrak{S}(a) \to \chi(a)$$

der

Multiplikationsgruppe | Additionsgruppe

von k auf die Multiplikationsgruppe der gewöhnlichen n-ten Einheitswurzeln, kurz ein *n-ter Charakter von k.* Im Falle $n \not\equiv 0 \bmod p$ liegt der Definition von $\chi(a)$ gemäß (12) noch die nicht näher beschreibbare Auszeichnung einer festen primitiven n-ten Einheitswurzel ζ aus k zugrunde, die der gewöhnlichen primitiven n-ten Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ zugeordnet sein soll. Im Falle $n = p$ ist die entsprechende Auszeichnung durch die Zuordnung von 1 zu $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ fest gegeben und dadurch $\chi(a) = e^{\frac{2\pi i \mathfrak{S}(a)}{p}}$ in bestimmter Weise normiert und formelmäßig dargestellt. Ich setze:

$$(14)\quad \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) = \chi(N_{\mathfrak{p}}(B)). \qquad | \qquad \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) = \chi(S_{\mathfrak{p}}(B)).$$

Dann ist also $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ dann und nur dann, wenn die Kongruenz (10) in K lösbar ist, und allgemeiner ist die Ordnung von $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)$ gleich der Ordnung von B in bezug auf die Gruppe mod. $\mathfrak{p}$ rechts in (10), also gleich dem Relativgrad f der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Z. $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)$ sei daher, mit einer geringen Verbiegung des Begriffes „n-te Potenz“ im Falle $n = p$, als das *n-te Potenzrestsymbol mod. $\mathfrak{p}$ in K* bezeichnet. Die Eigenschaft (11) ergibt:

$$(15)\quad \left(\frac{B_1 B_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{B_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{B_2}{\mathfrak{p}}\right). \qquad | \qquad \left(\frac{B_1 + B_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{B_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{B_2}{\mathfrak{p}}\right).$$

Ist insbesondere $\mathfrak{p}$ *vom Grade* 1, so fallen $N_{\mathfrak{p}}(B)$ und $S_{\mathfrak{p}}(B)$ mit dem konstanten Rest $B_{\mathfrak{p}}$ von B mod. $\mathfrak{p}$ zusammen, es wird also:

$$(16)\qquad \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) = \chi(B_{\mathfrak{p}}), \qquad \text{wo} \quad B \equiv B_{\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{p}.$$

Ist dabei $K = k(x)$ vom Geschlecht 0, also $B = B(x)$ rationale Funktion über k einer Erzeugenden x von K, so wird demgemäß

$$(17)\qquad \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) = \chi(B(a)), \qquad \text{wo} \quad x \equiv a \bmod \mathfrak{p},$$

wo also $x - a$ der $\mathfrak{p}$ enthaltende Linearfaktor in x aus K ist. Dies bleibt auch sinnvoll für den Nennerprimdivisor $\mathfrak{p}_\infty$ von x, wenn man formal $x \equiv \infty \bmod \mathfrak{p}_\infty$ festsetzt und $B(\infty)$ als den konstanten Rest von $B \bmod \mathfrak{p}_\infty$ versteht.

Hinsichtlich der Bildbarkeit von $B_\mathfrak{p}$ und, im Spezialfall, der Funktionswerte $B(a)$ sei an die Reduziertheitsvoraussetzung (8) erinnert. Die Definition von $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)$ kann natürlich ohne weiteres auch auf derartige nicht für $\mathfrak{p}$ reduzierte B ausgedehnt werden, deren Reduktion gemäß (7) $\lambda = 0$, also (8) ergibt.

b) Verzweigung.

Ich behandle jetzt den Fall $\lambda > 0$ in (7), also genauer

$0 < \lambda < n.$	$\lambda > 0,\ \lambda \not\equiv 0 \bmod p.$
Dann ist y von der gebrochenen Ordnung	
$\frac{\lambda}{n}$	$-\frac{\lambda}{p}$
in $\mathfrak{p}$. Daher ist $\mathfrak{p}$ in Z verzweigt von der Ordnung	
$e = \frac{n}{d}, \quad$ wo $d = (\lambda, n),$	$e = p,$
und Zerlegung und Trägheit von $\mathfrak{p}$ bestimmen sich nach a) für den Teilkörper Z_e von $Z = Z_1$, der durch die Gleichung $y^n = B^e$ erzeugt wird.	und es findet keine Zerlegung und Trägheit für $\mathfrak{p}$ statt.

Der Beitrag eines Primteilers $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ zur Differente $\mathfrak{D}$ von Z/K ist

$\mathfrak{D}_\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{e-1}.$	$\mathfrak{D}_\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{(p-1)(\lambda+1)}.$
Das ergibt sich ohne weiteres aus dem Dedekindschen Differentensatz, da hier e prim zur Charakteristik p des Restklassenkörpers mod. $\mathfrak{p}$ ist.	$\mathfrak{D}_\mathfrak{P}$ berechnet sich als die $\mathfrak{P}$-Potenz in der Differente eines Primelements zu $\mathfrak{P}$ aus Z, Ein solches ist $y^u P^v$, wo P ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ aus K ist, und u, v gemäß $\lambda \not\equiv 0 \bmod p$ so bestimmt sind, daß $-u\lambda + vp = 1$ ist. Die Differente von $y^u P^v$ ist nach (4) $$\prod_{\nu=1}^{p-1} \left((y+\nu)^u - y^u\right) P^v \cong \prod_{\nu=1}^{p-1} u\nu y^{u-1} P^v$$ $$\cong \left(\frac{y^u P^v}{y}\right)^{p-1} \cong \mathfrak{P}^{(p-1)(\lambda+1)}.$$

Der Beitrag von $\mathfrak{p}$ zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ von Z/K ist dann

$\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{d(e-1)}.$	$\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{(p-1)(\lambda+1)}.$

Um die Diskriminante $\mathfrak{d} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ in } Z \text{ verzw.}} \mathfrak{d}_\mathfrak{p}$ formal einfach darzustellen, setze ich:

(18) $\quad \mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ in } Z \text{ verzw.}} \mathfrak{p};$	$\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ in } Z \text{ verzw.}} \mathfrak{p}^{\lambda+1},$
$\mathfrak{f}_\nu$ möge die analoge Bedeutung für den durch $y^n = B^\nu$ erzeugten Teilkörper Z_ν haben (der nach (5) nur von (ν, n) abhängt).	wo λ jeweils den Exponenten aus der für $\mathfrak{p}$ reduzierten Form (7) von B bedeutet; die analog für die durch $y^p - y = \nu B$ erzeugten Teilkörper Z_ν gebildeten $\mathfrak{f}_\nu$ sind alle gleich $\mathfrak{f}$ bis auf $\mathfrak{f}_0 = 1$, da diese Z_ν nach (5) alle gleich Z sind bis auf $Z_0 = K$.

Dann gilt:

$$\mathfrak{d} = \prod_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{f}_\nu = \prod_{\nu=1}^{n-1} \mathfrak{f}_\nu. \tag{19}$$

Denn der Exponent des Beitrags von $\mathfrak{p}$ zum Produkt der $\mathfrak{f}_\nu$ ist nach dem Bewiesenen gleich der Anzahl der ν mit $\nu\lambda \not\equiv 0 \bmod. n$, also mit $\nu \not\equiv 0 \bmod. e$, also in der Tat gleich $d(e-1)$.

Hier ist das ohne weiteres klar.

Die Gesamtheit der Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{f}$, also die Gesamtheit der in Z verzweigten Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, ist nach dem Bewiesenen charakterisiert als die Gesamtheit derjenigen $\mathfrak{p}$, für die die lokale Reduktion von B auf die Form (7) zu einem Exponenten $\lambda > 0$ führt.

Ist speziell K *vom Geschlecht* 0, so kann diese Gesamtheit auch einfacher aus der im Großen reduzierten Form (6) von B abgelesen werden. Es sind nämlich genau die dortigen $\mathfrak{p}_j$, und außerdem im Falle $n \not\equiv 0 \bmod. p$ unter Umständen noch der Nennerprimdivisor $\mathfrak{p}_\infty$, dann und nur dann nämlich, wenn das dortige $l \not\equiv 0 \bmod. n$ ist.

Mittels der $\mathfrak{f}_\nu$ kann das *Geschlecht* $\bar{g}$ von Z bestimmt werden; ich setze dabei die absolute Irreduzibilitätsbedingung (3′) voraus, so daß also k der Konstantenkörper von Z ist. Dann bestimmt sich g aus der Formel:

$$2\bar{g} = \bar{d} - 2(\bar{n} - 1),$$

wo $\bar{d}$ den Grad der Diskriminante und $\bar{n}$ den Grad von Z/K_0 bezeichnet, für einen Teilkörper K_0 von Z vom Geschlecht 0 mit k als Konstantenkörper. K_0 sei als Teilkörper von K gewählt. Dann ist nach der Hilbertschen Diskriminantenformel

$$\bar{d} = d_0 n + d,$$

wo d_0 und d die Grade der Diskriminanten von K/K_0 und Z/K bezeichnen. Entsprechend ist

$$\bar{n} - 1 = (n_0 - 1)n + (n - 1),$$

wo noch n_0 den Grad von K/K_0 bezeichnet. Also ist auch entsprechend

$$2\bar{g} = 2g_0 n + 2g,$$

wo g_0 das durch

$$2g_0 = d_0 - 2(n_0 - 1)$$

gegebene Geschlecht von K_0 ist, und g durch die entsprechende Formel

$$2g = d - 2(n - 1)$$

definiert ist und als das *Relativgeschlecht* von Z/K bezeichnet werden mag. Nach (19) ist

$$d = \sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu,$$

wo f_ν der Grad von $\mathfrak{f}_\nu$ ist. Daher wird das doppelte Relativgeschlecht von Z/K:

$$2g = \sum_{\nu=1}^{n-1} (f_\nu - 2), \tag{20}$$

und das doppelte volle Geschlecht von Z:

$$2\bar{g} = 2g_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (2g_0 - 2 + f_\nu). \tag{21}$$

Ist speziell K vom Geschlecht $g_0 = 0$, so stimmt das Relativgeschlecht g mit dem vollen Geschlecht von $\bar{g}$ von Z überein.

Die zur Berechnung von g und $\bar{g}$ nach (20) und (21) gebrauchten Grade f_ν können nach den im Vorhergehenden entwickelten Regeln aus B bestimmt werden; insbesondere für K vom Geschlecht $g_0 = 0$ können sie einfach aus der im Großen reduzierten Form (6) von B abgelesen werden.

4. Es sei fortan durchweg k *ein endlicher Körper* von q Elementen. Dann ist also jedem nicht in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K nach (12)—(14) eine gewöhnliche n-te Einheitswurzel $\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)$, das n-te Potenzrestsymbol mod. $\mathfrak{p}$ in K, zugeordnet. Ich definiere daraus das *zusammengesetzte n-te Potenzrestsymbol in* K:

$$(22)\quad \left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)^{\mu}, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mu} \text{ ein zu } \mathfrak{f} \text{ primer Divisor von } K \text{ ist.}$$

Für ganze $\mathfrak{a}$, und wenn $\mathfrak{a}$ prim sogar

zu B selbst (nicht nur zu $\mathfrak{f}$)	zum Nenner von B selbst (nicht nur zu $\mathfrak{f}$)

ist, ist nach (14)

$$(23)\quad \left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = \chi(N_{\mathfrak{a}}(B)), \qquad \left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = \chi(S_{\mathfrak{a}}(B)),$$

wo $N_{\mathfrak{a}}(B)$ und $S_{\mathfrak{a}}(B)$ die Norm und Spur von B im Restklassenring mod. $\mathfrak{a}$ von K in bezug auf den Konstantenkörper k bedeuten. Denn für ganze $\mathfrak{a}$ ist der Restklassenring mod. $\mathfrak{a}$ direkte Summe der Restklassenringe mod. $\mathfrak{p}^{\mu}$, also

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = \prod_{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}^{\mu}}(B), \qquad S_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{p}} S_{\mathfrak{p}^{\mu}}(B),$$

und vermöge einer k-Basis der Form $R_i P^{\varkappa}$ (R_i Basis mod. $\mathfrak{p}$, P Primelement zu $\mathfrak{p}$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, \mu - 1$) findet man

$$N_{\mathfrak{p}^{\mu}}(B) = N_{\mathfrak{p}}(B)^{\mu}. \qquad S_{\mathfrak{p}^{\mu}}(B) = \mu S_{\mathfrak{p}}(B).$$

Ich will im folgenden das *Reziprozitätsgesetz* für dieses Symbol beweisen. Dieses läuft auf die folgende *Kernaussage* zurück:

$$(24)\quad \left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = 1, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} \sim N(\mathfrak{A}) \bmod \mathfrak{f},$$

wo $\mathfrak{A}$ ein zu $\mathfrak{f}$ primer Divisor von Z ist und die Äquivalenz mod. $\mathfrak{f}$ bedeutet, daß der Quotient beider Seiten Hauptdivisor und durch ein Element $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{f}$ aus K darstellbar ist.

Der Beweis von (24) erfolgt durch die Theorie der zyklischen Algebren über K nach dem Muster des entsprechenden Beweises in der algebraischen Zahlentheorie [5]). Ich bemerke zunächst, daß sich die Theorie der lokalen Divisionsalgebren [6]) ohne weiteres auf die $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen $K_{\mathfrak{p}}$ eines algebraischen Funktionenkörpers K über endlichem Konstantenkörper k überträgt. Daher gilt auch die in H. II, (5. 3) und (6. 6) [zunächst exkl. (6. 64)] entwickelte Theorie des Normenrestsymbols. Daß der dortige $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ hier gerade der $\mathfrak{p}$-Beitrag zu dem in (18) definierten Modul $\mathfrak{f}$ ist, ergibt sich aus dem ebenfalls auf K als Grundkörper übertragbaren Zusammenhang zwischen $\mathfrak{p}$-Führer und $\mathfrak{p}$-Beitrag zur Diskriminante [7]) oder kann auch leicht direkt bewiesen

[5]) Siehe dazu H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933); im folgenden zitiert mit H. II.

[6]) Siehe dazu H. Hasse, Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), §§ 1—6.

[7]) Siehe dazu H. Hasse, Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper, Journ. Coll. Science Tokyo (1) **2** (1934).

werden. Der Hauptpunkt für den Beweis von (24) ist dann die Übertragung des Beweises von H. II, (6. 54). Dies soll hier näher ausgeführt werden.

Nach einem Satze von Tsen [8]) zerfällt jede zyklische Algebra über $\bar{K} = K\bar{k}$, wo $\bar{k}$ die algebraisch-abgeschlossene Hülle von k (der Körper aller algebraischen Elemente mod. p) ist. Für jede zyklische Algebra A über K ist also $\bar{K}$ Zerfällungskörper. A wird dann auch bereits von einer geeigneten in $\bar{K}$ enthaltenen endlichen algebraischen Erweiterung $K^{(r)} = Kk^{(r)}$ von K zerfällt, wo also $k^{(r)}$ ein endlicher Körper von q^r Elementen ist. Damit ist das Analogon des relativ-zyklischen relativen Kreiskörpers W in H.II, (6. 54) gewonnen. Sei dann

$$\mathsf{A} \sim (A, K^{(r)}, F)$$

eine zum Zerfällungskörper $K^{(r)}$ gehörige zyklische Darstellung von A, wobei F den Frobenius-Automorphismus $\alpha \to \alpha^q$ von $k^{(r)}/k$ und den daraus abgeleiteten Automorphismus von $K^{(r)}/K$ bezeichnet und $A \neq 0$ ein Element aus K ist. Um die $\mathfrak{p}$-Invarianten $\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ von A für die Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K zu bestimmen, hat man zu den $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$ von A überzugehen. Hat $\mathfrak{p}$ den Grad $m_\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = q^{m_\mathfrak{p}}$, und ist

$$(m_\mathfrak{p}, r) = d_\mathfrak{p}, \quad \left\{\begin{matrix} m_\mathfrak{p} = d_\mathfrak{p} m_{0\mathfrak{p}} \\ r = d_\mathfrak{p} r_{0\mathfrak{p}} \end{matrix}\right\}, \quad (m_{0\mathfrak{p}}, r_{0\mathfrak{p}}) = 1,$$

so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $K^{(r)}$ in $d_\mathfrak{p}$ verschiedene konjugierte Primteiler $\mathfrak{p}^{(r)}$ vom Grade $m_{0\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{(r)}) = q^{rm_{0\mathfrak{p}}} = q^{m_\mathfrak{p} r_{0\mathfrak{p}}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{r_{0\mathfrak{p}}}$ (siehe dazu H. I, § 8). Es wird dann

$$\mathsf{A}_\mathfrak{p} \sim (A, K^{(r)}_{\mathfrak{p}^{(r)}}, F^{d_\mathfrak{p}}) \sim (A^{m_{0\mathfrak{p}}}, K^{(r)}_{\mathfrak{p}^{(r)}}, F^{m_\mathfrak{p}}).$$

Dabei ist $K^{(r)}_{\mathfrak{p}^{(r)}} = K_\mathfrak{p} k^{(r)}$ vom Grade $r_{0\mathfrak{p}}$ über $K_\mathfrak{p}$, und $F^{m_\mathfrak{p}}$ ist der Frobenius-Automorphismus von $K^{(r)}_{\mathfrak{p}^{(r)}}/K_\mathfrak{p}$; denn der Restklassenkörper von $K^{(r)}_{\mathfrak{p}^{(r)}}$ wird aus dem bei $F^{d_\mathfrak{p}}$ elementweise invarianten Restklassenkörper von $K_\mathfrak{p}$ durch Adjunktion von $k^{(r)}$ erzeugt, und $k^{(r)}$ erfährt bei $F^{d_\mathfrak{p}}$ den Automorphismus $\alpha \to \alpha^{q^{d_\mathfrak{p}}}$, also bei $F^{m_\mathfrak{p}}$ den Automorphismus $\alpha \to \alpha^{q^{m_\mathfrak{p}}} = \alpha^{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}$. Daher ist

$$\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \frac{m_{0\mathfrak{p}} \varrho_\mathfrak{p}}{r_{0\mathfrak{p}}} \equiv \frac{m_\mathfrak{p} \varrho_\mathfrak{p}}{r} \bmod. 1,$$

wo $\varrho_\mathfrak{p}$ die Ordnungszahl von A für $\mathfrak{p}$ ist. Wegen $\sum_\mathfrak{p} m_\mathfrak{p} \varrho_\mathfrak{p} = 0$ ist also

$$\sum_\mathfrak{p} \left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \bmod. 1.$$ [8a])

Nunmehr steht auch die Übertragung der Produktformel H. II, (6. 64) für das Normenrestsymbol fest, und damit dann sofort auch die Übertragung des Beweises von H. II, (6. 71). Damit ist (24) bewiesen.

Im Falle $n \not\equiv 0 \bmod. p$ gilt für das Normenrestsymbol auch der Vertauschungssatz, und es ergibt sich analog wie in meinem Klassenkörperbericht, Teil II, § 12 die Reziprozitätsformel:

$$\left(\frac{B}{A}\right) = \left(\frac{A}{B}\right), \tag{25}$$

---

[8]) Ch. C. Tsen, Algebren über Funktionenkörpern, Dissertation, Göttingen 1934; Divisionsalgebren über Funktionenkörpern, Göttinger Nachrichten 1933.

[8a]) Siehe hierzu auch die während der Drucklegung erschienene Arbeit: E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen, Math. Ann. **110** (1934). Dort wird der Beweis der Summenformel auf den Riemann-Rochschen Satz anstelle des Satzes von Tsen gestützt und verläuft im übrigen genau wie oben.

wenn die zu A und B gehörigen Führer $\mathfrak{f}_A$ und $\mathfrak{f}_B$ prim zueinander sind, sowie allgemeiner:

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right):\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right)=\prod_{\mathfrak{p}\mid(\mathfrak{f}_A,\mathfrak{f}_B)}\left(\frac{A,B}{\mathfrak{p}}\right) \tag{26}$$

für beliebige $A, B \neq 0$ aus K, wobei $\mathfrak{a}$ den zu $\mathfrak{f}_B$ primen Bestandteil von A und $\mathfrak{b}$ den zu $\mathfrak{f}_A$ primen Bestandteil von B bezeichnet. Darauf brauche ich nicht näher einzugehen.

Der skizzierte zur Übertragung von H. II, (6. 71) führende Gedankengang ist von den Einschränkungen $q \equiv 1 \bmod. n$ bzw. $n = p$, die sonst in dieser Arbeit gemacht sind, unabhängig, gilt also für separable zyklische Erweiterungskörper Z *beliebigen Grades* n über einem algebraischen Funktionenkörper K mit endlichem Konstantenkörper k. Er liefert weiter nach dem zu H. II, (6. 72) führenden Schlußschema den *Umkehrsatz der Klassenkörpertheorie* (*inkl. Isomorphiesatz, Zerlegungssatz, Artinsches Reziprozitätsgesetz*) in dieser Allgemeinheit, nämlich den Satz:

Das zusammengesetzte Artin-Symbol $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)$ *definiert vermöge* $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)=1$ *eine Kongruenzdivisorengruppe* H *in* K *vom Führer* $\mathfrak{f}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ *und Index* n. Z *ist Klassenkörper über* K (*im Takagischen Sinne*) *zu dieser Kongruenzdivisorengruppe* H, *und* $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)$ *vermittelt einen Isomorphismus zwischen der Klassengruppe nach* H *und der Galoisgruppe von* Z/K.

Zum Beweis sind wie in H. II, (6. 7) noch die folgenden beiden Tatsachen zu beweisen:

a) $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)$ *durchläuft die volle Galoisgruppe von* Z/K.

b) *Der Index* h *von* H *in der Gruppe aller zu* $\mathfrak{f}$ *primen Divisoren von* K *hat jedenfalls die Eigenschaft* $h \leqq n$.

Zu a). $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)$ durchläuft eine gewisse Untergruppe der zyklischen Galoisgruppe der Ordnung n von Z/K; diese Untergruppe habe die Ordnung $n_0 = \frac{n}{d}$. Dann zerfällt jeder zu $\mathfrak{f}$ prime Primdivisor von K voll im Teilkörper Z_{n_0} von Z vom Grade d über K. Also ist die Zetafunktion $\zeta_{Z_{n_0}}(s)$ von Z_{n_0} höchstens um endlich viele Primdivisorbeitragsfaktoren von der Potenz $\zeta_K(s)^d$ der Zetafunktion von K unterschieden. Da aber die Pole beider Zetafunktionen von der Ordnung 1 sind, folgt $d = 1$, also $n_0 = n$.

Zu b). Das folgt ebenfalls aus der analytischen Theorie, ganz analog zur algebraischen Zahlentheorie [9]).

Der obige Klassenkörperhauptsatz überträgt sich dann noch ohne weiteres in geläufiger Weise auf *beliebige separable abelsche Erweiterungskörper von* K. Damit ist eine dem heutigen Stande angepaßte Begründung der in Schm. 4 entwickelten Klassenkörpertheorie gegeben und insbesondere die dortige Beschränkung auf zur Charakteristik p prime Grade n beseitigt.

Unter den speziellen Voraussetzungen $q \equiv 1 \bmod. n$ bzw. $n = p$ dieser Arbeit kann in dem obigen Klassenkörperhauptsatz das abstrakte Artin-Symbol $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)$ durch das im

---

[9]) Siehe Schm. 4, wo § 2 im Gegensatz zum Rest von der Beschränkung auf Grade $n \not\equiv 0 \bmod. p$ frei ist.

vorstehenden eingeführte konkrete ihm isomorph zugeordnete n-te Potenzrestsymbol $\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right)$ ersetzt werden.

5. Für den Spezialfall, daß K *vom Geschlecht* 0 ist, sei noch ein anderer ganz elementarer Beweis des Reziprozitätsgesetzes (24) gegeben. Es kommt wesentlich auf den Nachweis der Tatsache an:

(27) $\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{B}{\bar{\mathfrak{a}}}\right)$, wenn $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ ganz, prim zu $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a} \sim \bar{\mathfrak{a}}$ mod. $\mathfrak{f}$.

Denn $\left(\frac{B}{N(\mathfrak{A})}\right) = 1$ folgt unmittelbar aus $\left(\frac{B}{N(\mathfrak{P})}\right) = \left(\frac{B}{\mathfrak{p}'}\right) = \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right)^{f} = 1$.

Sei B gemäß (6) reduziert.

Im Falle $n \not\equiv 0 \bmod p$ ist dann

$$B = b\,\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}_\infty^{l}} \quad (\mathfrak{b} \text{ ganz, prim zu } \mathfrak{p}_\infty)$$

ein Polynom vom Grade l in einer Erzeugenden x von K (Nenner $\mathfrak{p}_\infty$) mit höchstem Koeffizienten b, und $\mathfrak{f}$ besteht, wie schon oben bemerkt, genau aus den einfachen Primteilern von $\mathfrak{b}$ und im Falle $l \not\equiv 0 \bmod. n$ dazu noch $\mathfrak{p}_\infty$.

Sei zunächst $\mathfrak{a}$ auch im Falle $l \equiv 0 \bmod. n$ auch prim zu $\mathfrak{p}_\infty$ vorausgesetzt, und sei

$$A = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_\infty^{m}}$$

das $\mathfrak{a}$ zugeordnete normierte Polynom in x. Nach (23) ist dann

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = \chi(N_{\mathfrak{a}}(B)).$$

$N_{\mathfrak{a}}(B)$ bestimmt sich aus den Basisdarstellungen

$$BA_i \equiv \sum_j b_{ij} A_j \bmod. \mathfrak{a}$$

der Multipla BA_i einer k-Basis A_i des Restklassenrings mod. $\mathfrak{a}$ in K als

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = |b_{ij}|,$$

und dieser Bestimmungsmechanismus ist invariant bei beliebiger Erweiterung des Koeffizientenkörpers k des Restklassenrings (als hyperkomplexes System). Bei Erweiterung auf $\bar{k}$ zerfällt dieser Restklassenring in eine direkte Summe entsprechend der Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in Potenzen $\bar{\mathfrak{p}}^{\mu}$ verschiedener Primdivisoren $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\bar{K} = K\bar{k}$, also entsprechend der Zerlegung von $A = A(x)$ in Potenzen verschiedener Linearfaktoren $x - \alpha = \frac{\bar{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}_\infty}$ in $\bar{K}$. Die Norm $N_{\mathfrak{a}}$ zerfällt entsprechend in das Produkt der Partialnormen $N_{\bar{\mathfrak{p}}^{\mu}}$. Aus der Basis $1, x - \alpha, \ldots, (x-\alpha)^{\mu-1} \bmod. \bar{\mathfrak{p}}^{\mu}$ und

$$B(x)\,(x-\alpha)^{\mu} \equiv B(\alpha)\,(x-\alpha)^{\mu} \bmod. \bar{\mathfrak{p}}^{\mu+1},$$

wo $B(\alpha)$ der Funktionswert von $B = B(x)$ für α ist, folgt

$$N_{\bar{\mathfrak{p}}^{\mu}}(B) = B(\alpha)^{\mu}.$$

Daher wird

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = \prod_{i=1}^{m} B(\alpha_i),$$

wo die α_i die m (nicht mehr nach Vielfachheiten zusammengefaßten) Nullstellen von $A(x)$ sind:

$$A(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i).$$

Ist entsprechend

$$B(x) = b \prod_{j=1}^{l} (x - \beta_j),$$

so wird also:

$$N_a(B) = \prod_{i=1}^{m} B(\alpha_i) = b^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{l} (\alpha_i - \beta_j)$$

$$= (-1)^{ml} b^m \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=1}^{m} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{ml} b^m \prod_{j=1}^{l} A(\beta_j) = (-1)^{ml} b^m N_b(A),$$

und somit

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right) = \chi(-1)^{ml}\, \chi(b)^m \left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right). \tag{28}$$

Diese Formel gilt auch im Falle, daß $l \equiv 0 \bmod. n$ und $\mathfrak{a}$ nicht prim zu $\mathfrak{p}_\infty$, also A in x von niedrigerem Grade als m ist; das ergibt sich unmittelbar aus der dann nach (17) gültigen Tatsache

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = \chi(b)$$

$\left(\frac{B}{x^l}\right.$ ist für $\mathfrak{p}_\infty$ reduziert$\left.\right)$ und dem Wegfallen der Potenz von $\chi(-1)$ bei $l \equiv 0 \bmod. n$.

Ist nun entsprechend $A = \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{p}_\infty^m}$ — die Grade von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ stimmen wegen $\mathfrak{a} \sim \bar{\mathfrak{a}}$ mod. $\mathfrak{f}$ überein —, so ist

$$\left(\frac{B}{\bar{\mathfrak{a}}}\right) = \chi(-1)^{ml}\, \chi(b)^m \left(\frac{\bar{A}}{\mathfrak{b}}\right).$$

Zum Beweis von (27) ist also $\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\bar{A}}{\mathfrak{b}}\right)$ als Folge von $\mathfrak{a} \sim \bar{\mathfrak{a}}$ mod. $\mathfrak{f}$ zu erweisen. Nun folgt daraus jedenfalls

$$A \equiv a\bar{A} \bmod. \mathfrak{f} \quad \text{mit} \quad a \neq 0 \text{ aus } k.$$

Im Falle $l \not\equiv 0 \bmod. n$ ist sogar $a = 1$, weil dann $\mathfrak{p}_\infty$ in $\mathfrak{f}$ vorkommt und weil A, $\bar{A}$ normiert sind. Nach dem zuvor über $\mathfrak{f}$ Gesagten folgt dann in der Tat $\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\bar{A}}{\mathfrak{b}}\right)$ auf Grund der Definitionen (22), (14).

Im Falle $l \equiv 0 \bmod. n$ folgt entsprechend

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)\left(\frac{\bar{A}}{\mathfrak{b}}\right) = \chi(a)^l \left(\frac{\bar{A}}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\bar{A}}{\mathfrak{b}}\right).$$

Damit ist (27) bewiesen. Der Beweis ist wesentlich identisch mit dem auf Dedekindscher Grundlage in Schm. 2, § 3 entwickelten Beweis der Reziprozitätsformel (28). (dort ist noch $b = 1$ angenommen, was aber keine wesentliche Einschränkung ist). Diese bekannte Reziprozitätsformel ist natürlich auch aus der allgemeinen Formel (26) herleitbar [10]):

---

[10]) Man beachte, daß in (26) der Herleitung nach natürlich $\mathfrak{f}_A$ und $\mathfrak{f}_B$ durch irgendwelche Multipla ersetzt werden dürfen, also hier $\mathfrak{p}_\infty$ in beide aufgenommen werden darf, falls es noch nicht vorkommt.

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right):\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right)=\left(\frac{A,B}{\mathfrak{p}_\infty}\right)=\left(\frac{x^m,b\,x^l}{\mathfrak{p}_\infty}\right)=\left(\frac{x,x}{\mathfrak{p}_\infty}\right)^{ml}\left(\frac{x,b}{\mathfrak{p}_\infty}\right)^{m}=\left(\frac{-1,x}{\mathfrak{p}_\infty}\right)^{ml}\left(\frac{b,x}{\mathfrak{p}_\infty}\right)^{m}$$
$$=\chi(-1)^{ml}\chi(b)^m.$$

Bisher nicht bekannt ist jedoch die Tatsache (27) im Falle $\underline{n=p}$. Dann ist nach (6)

$$B\cong\frac{\mathfrak{g}}{\prod_{j=1}^{r}\mathfrak{p}_j^{\lambda_j}}\qquad\begin{pmatrix}\lambda_j>0,\ \lambda_j\not\equiv 0 \bmod. p\\ \mathfrak{g}\text{ ganz, prim zu den }\mathfrak{p}_j\end{pmatrix}$$

und nach (18)

$$\mathfrak{f}=\prod_{j=1}^{r}\mathfrak{p}_j^{\lambda_j+1},$$

sowie nach (23)

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right)=\chi(S_{\mathfrak{a}}(B)),\qquad\left(\frac{B}{\bar{\mathfrak{a}}}\right)=\chi(S_{\bar{\mathfrak{a}}}(B)).$$

Ich werde sogar

$$S_{\mathfrak{a}}(B)=S_{\bar{\mathfrak{a}}}(B)\quad\text{für}\quad\mathfrak{a}\sim\bar{\mathfrak{a}}\bmod.\mathfrak{f}$$

beweisen.

Wegen der Unabhängigkeit der Spur vom Koeffizientenkörper des Restklassenrings mod. $\mathfrak{a}$ kann dieser Beweis wieder in $\bar{K}=K\bar{k}$ geführt werden. Der einfacheren Bezeichnung halber seien die angegebenen Darstellungen von B und $\mathfrak{f}$ schon die auf $\bar{K}$ bezogenen, also die $\mathfrak{p}_j$ verschiedene Primdivisoren von $\bar{K}$. In $\bar{K}$ existiert (anders als evtl. in K) sicherlich ein nicht in $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ aufgehender Primdivisor $\mathfrak{p}_\infty$. Sei dann x eine Erzeugende von $\bar{K}$ vom Nenner $\mathfrak{p}_\infty$, ferner wie vorher

$$A=A(x)=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_\infty^m}=\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)$$

das zu $\mathfrak{a}$ gehörige normierte Polynom in $\bar{K}$ vom Grade m in x. Dann ist entsprechend wie vorher

$$S_{\mathfrak{a}}(B)=\sum_{i=1}^{m}B(\alpha_i).$$

Ist nun

$$B(x)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{\lambda_j}\frac{b_{j\mu}}{(x-\beta_j)^\mu}+b$$

die Partialbruchzerlegung von $B=B(x)$, so ist also

$$S_{\mathfrak{a}}(B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{\lambda_j}\frac{b_{j\mu}}{(\alpha_i-\beta_j)^\mu}+mb=\sum_{j=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{\lambda_j}b_{j\mu}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\alpha_i-\beta_j)^\mu}+mb.$$

Nun ist

$$\frac{A'(x)}{A(x)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x-\alpha_i},$$

also

$$\frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\frac{A'(x)}{A(x)}=(-1)^{\mu-1}D_{\mu-1}\frac{A'(x)}{A(x)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(x-\alpha_i)^\mu}.$$

Man beachte dabei, daß die Differentialoperation $D_\mu=\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu}{dx^\mu}$ auch für $\mu\equiv 0 \bmod. p$

algebraisch sinnvoll ist (Grunddefinition: $D_\mu x^h = \binom{h}{\mu} x^{h-\mu}$) und den formalen Differentiationsgesetzen genügt. Hiernach ist

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\alpha_i - \beta_j)^\mu} = -D_{\mu-1} \frac{A'(x)}{A(x)}\Big|_{\beta_j},$$

und somit

$$S_{\mathfrak{a}}(B) = -\sum_{j=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{\lambda_j} b_{j\mu} D_{\mu-1} \frac{A'(x)}{A(x)}\Big|_{\beta_j} + mb.$$

Entsprechend ist für $\bar{\mathfrak{a}}$

$$S_{\bar{\mathfrak{a}}}(B) = -\sum_{j=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{\lambda_j} b_{j\mu} D_{\mu-1} \frac{\bar{A}'(x)}{\bar{A}(x)}\Big|_{\beta_j} + mb.$$

Aus $\mathfrak{a} \sim \bar{\mathfrak{a}} \bmod \mathfrak{f}$ folgt nun wieder $A(x) \equiv a\bar{A}(x) \bmod \mathfrak{f}$ mit $a \neq 0$ aus k, also

$$A(x) \equiv a\bar{A}(x) \bmod \mathfrak{p}_j^{\lambda_j+1}.$$

Daraus erkennt man durch Differentiation der Entwicklungen nach steigenden Potenzen von $x - \beta_j = \frac{\mathfrak{p}_j}{\mathfrak{p}_\infty}$ — die Entwicklungen beider Seiten beginnen genau mit der nullten Potenz —:

$$\frac{A'(x)}{A(x)} \equiv \frac{\bar{A}'(x)}{\bar{A}(x)} \bmod \mathfrak{p}_j^{\lambda_j}$$

$$D_1 \frac{A'(x)}{A(x)} \equiv D_1 \frac{\bar{A}'(x)}{\bar{A}(x)} \bmod \mathfrak{p}_j^{\lambda_j-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{\lambda_j-1} \frac{A'(x)}{A(x)} \equiv D_{\lambda_j-1} \frac{\bar{A}'(x)}{\bar{A}(x)} \bmod \mathfrak{p}_j.$$

Wegen $x \equiv \beta_j \bmod \mathfrak{p}_j$ ergibt das die Behauptung $S_{\mathfrak{a}}(B) = S_{\bar{\mathfrak{a}}}(B)$.

Es sei noch bemerkt, daß die in diesem Beweis auftretenden logarithmischen Differentialquotienten das genaue Analogon zu den in der algebraischen Zahlentheorie von Kummer eingeführten logarithmischen Differentialquotienten sind. Dort treten diese beim Studium der expliziten Formel für das Normenrestsymbol für höher verzweigte Primideale auf. Auch hier handelt es sich bei den Primdivisoren $\mathfrak{p}_j$ im Falle $n = p$ um höher verzweigte Primdivisoren (während im Falle $n \not\equiv 0 \bmod p$ höhere Verzweigungen nicht auftreten). Durch das Studium der expliziten Reziprozitätsformeln für algebraische Funktionenkörper ist hiernach eine Vertiefung und vielleicht auch eine Förderung der Theorie der expliziten Reziprozitätsformeln für algebraische Zahlkörper zu erwarten.

6. Ich führe jetzt die zu Z/K gehörigen *L-Funktionen* ein. Dazu definiere ich zunächst die zu Z/K gehörigen *Charaktere*:

$$\chi^\nu(\mathfrak{a}) = \left(\frac{B^\nu}{\mathfrak{a}}\right) \qquad (\nu \bmod n),$$

wobei in Ergänzung zu (22) noch festgesetzt ist:

$$\chi^\nu(\mathfrak{a}) = \left(\frac{B^\nu}{\mathfrak{a}}\right) = 0,$$

wenn $\mathfrak{a}$ nicht prim zum Führer $\mathfrak{f}_\nu$ von Z_ν ist (*eigentliche* Charaktere). Dann sei

$$L(s, \chi^\nu) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{\chi^\nu(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi^\nu(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}, \tag{29}$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren, $\mathfrak{a}$ alle ganzen Divisoren von K durchläuft. Die Konvergenz für $\Re s > 1$ ergibt sich aus der Konvergenz von Produkt- und Reihenentwicklung der zu K gehörigen Zetafunktion $\zeta_K(s) = L(s, \chi^0)$ (siehe H. I, § 3).

Aus dem in § 3 bewiesenen Zerlegungsgesetz folgt in geläufiger Weise die Aufspaltung:

$$\zeta_Z(s) = \zeta_K(s) \prod_{\nu=1}^{n-1} L(s, \chi^\nu) \tag{30}$$

der Zetafunktion von Z in die Zetafunktion von K und die zu Z/K gehörigen L-Funktionen.

Ich setze von jetzt an voraus, daß auch Z den Konstantenkörper k hat, daß also die absolute Irreduzibilitätsbedingung (3′) für B erfüllt ist. Ist dann $\zeta_0(s)$ die Zetafunktion für das Geschlecht 0, so sind nach H. I, Satz 5 die Quotienten von $\zeta_K(s)$ und $\zeta_Z(s)$ mit $\zeta_0(s)$ Polynome in $\frac{1}{q^s}$, und zwar ist genauer:

$$\begin{aligned} L_K(s) &= \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_0(s)} = 1 + \frac{N_{01} - (q+1)}{q^s} + \cdots + \frac{q^{g_0}}{q^{2g_0 s}}, \\ L_Z(s) &= \frac{\zeta_Z(s)}{\zeta_0(s)} = 1 + \frac{\bar{N}_1 - (q+1)}{q^s} + \cdots + \frac{q^{\bar{g}}}{q^{2\bar{g}s}}, \end{aligned} \tag{31}$$

wo g_0, $\bar{g}$ die Geschlechter und N_{01}, $\bar{N}_1$ die Anzahlen der Primdivisoren 1. Grades von K, Z bezeichnen. Nach (21) ist also $\prod_{\nu=1}^{n-1} L(s, \chi^\nu)$ ein Polynom in $\frac{1}{q^s}$ vom Grade $\sum_{\nu=1}^{n-1}(2g_0 - 2 + f_\nu)$, wo die f_ν die Grade der $\mathfrak{f}_\nu$ sind. Da nach (30), (31) auch

$$L_Z(s) = L_K(s) \prod_{\nu=1}^{n-1} L(s, \chi^\nu) \tag{32}$$

ist, liegt die Vermutung nahe:

Die einzelnen $L(s, \chi^\nu)$ sind Polynome in $\frac{1}{q^s}$ der Grade $2g_0 - 2 + f_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$.

Das läßt sich in der Tat zeigen. Auf Grund von (32) ist dazu nur noch die folgende Tatsache zu beweisen:

$$\sum_{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = q^m} \chi^\nu(\mathfrak{a}) = 0 \quad \text{für} \quad m > 2g_0 - 2 + f_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1). \tag{33}$$

Nach (24) ist nun

$$\chi^\nu(\mathfrak{a}) = \chi^\nu(\bar{\mathfrak{a}}), \qquad \text{wenn } \mathfrak{a} \sim \bar{\mathfrak{a}} \text{ mod. } \mathfrak{f}_\nu,$$

und nach Schm. 4, § 2, b′) liegen in jeder Strahlklasse mod. $\mathfrak{f}_\nu$ eines Grades $m > 2g_0 - 2 + f_\nu$ gleichviele ganze Divisoren $\mathfrak{a}$[11]). Daher reduziert sich (33) auf den Nachweis:

$$\sum_{\mathfrak{r}} \chi^\nu(\mathfrak{r}) = 0, \tag{34}$$

wo $\mathfrak{r}$ ein volles Repräsentantensystem der Strahlklassen mod. $\mathfrak{f}_\nu$ vom Grade 0 durchläuft.

---

[11]) Es sei darauf hingewiesen, daß der durchgängige Druckfehler aus Schm. 3 (siehe dazu H. I, Fußnote 3) auch in Schm. 4 übergegangen ist. Dort muß auf S. 273 in a), b), a′), b′) und in Zeile 6 von unten jedesmal $>$ statt bloß $\geqq$ stehen.

Nun ist χ^ν Charakter für die Gruppe aller zu $\mathfrak{f}_\nu$ primen Divisoren, also auch für die darin enthaltene Untergruppe der zu $\mathfrak{f}_\nu$ primen Divisoren 0. Grades. (34) stimmt daher, wenn χ^ν für diese Untergruppe nicht der Hauptcharakter ist. Wäre das aber der Fall, so wäre der Charakter $\chi^\nu(\mathfrak{a})$ in der vollen Divisorengruppe von K nur vom Grade m von $\mathfrak{a}$ abhängig. Da χ^ν nach dem obigen Klassenkörperhauptsatz genau von der Ordnung $n_0 = \frac{n}{(\nu, n)}$ (dem Grade von Z_ν über K) ist, gälte also

$$\chi^\nu(\mathfrak{a}) = 1 \text{ dann und nur dann, wenn } m \equiv 0 \bmod. n_0,$$

und allgemein wäre die Ordnung eines Wertes $\chi^\nu(\mathfrak{a})$ gleich $\frac{n_0}{(m, n_0)}$. Jeder Primdivisor von K zerfiele also in Z_ν in verschiedene Primdivisoren desselben Grades wie in der absolut-algebraischen Erweiterung $Kk^{(n_0)}$, und daher wären für $Z_\nu k^{(n_0)}/Kk^{(n_0)}$ alle Primdivisoren voll zerlegt. Nach dem obigen Klassenkörperhauptsatz besagt das aber $Z_\nu k^{(n_0)} = Kk^{(n_0)}$, d. h. mit Hinblick auf die Grade sogar $Z_\nu = Kk^{(n_0)}$, und das steht in Widerspruch mit der vorausgesetzten absoluten Irreduzibilität. Damit ist (34), also (33) bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß man im Spezialfall, daß K vom Geschlecht 0 ist, die Relation (33) auch wieder durch eine einfache elementare Rechnung beweisen kann, die insbesondere nicht von dem analytisch fundierten Klassenkörperhauptsatz Gebrauch macht.

7. Ich setze das durch $L(s, \chi^\nu)$ bestimmte Polynom in $z = q^s$ in der Form an:

$$(35) \quad q^{(2g_0-2+f_\nu)s} L(s, \chi^\nu) = G(z, \chi^\nu) = z^{2g_0-2+f_\nu} + \sigma(\chi^\nu)\, z^{2g_0-2+f_\nu-1} + \cdots + \pi(\chi^\nu) = \prod_{\varkappa=1}^{2g_0-2+f_\nu} (z - \varpi_{\nu\varkappa}).$$

Die $\varpi_{\nu\varkappa}$ sind dann also in ihrer Gesamtheit die zu den Nullstellen von $\zeta_K(s)$ hinzukommenden Nullstellen von $\zeta_Z(s)$ in $z = q^s$. Nach H. I, § 7 gilt durchweg:

$$q^{1-\vartheta} \leqq |\varpi_{\nu\varkappa}| \leqq q^\vartheta \quad \text{mit} \quad \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta < 1.$$

Von besonderem Interesse wäre es, die *letzten Koeffizienten*

$$(36) \quad \pi(\chi^\nu) = \sum_{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = q^{2g_0-2+f_\nu}} \chi^\nu(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = q^{2g_0-2+f_\nu}} \left(\frac{B^\nu}{\mathfrak{a}}\right) = (-1)^{f_\nu} \prod_{\varkappa=1}^{2g_0-2+f_\nu} \varpi_{\nu\varkappa}$$

der $L(s, \chi^\nu)$ zu berechnen, sowie auch nachzuweisen, daß die $L(s, \chi^\nu)$ der *Funktionalgleichung* genügen:

$$(37) \quad q^{(g_0-1+\frac{1}{2}f_\nu)s} L(s, \chi^\nu) = \varepsilon(\chi^\nu)\, q^{(g_0-1+\frac{1}{2}f_\nu)(1-s)} L(1-s, \bar{\chi}^\nu)$$

mit

$$\varepsilon(\chi^\nu) = \frac{\pi(\chi^\nu)}{q^{g_0-1+\frac{1}{2}f_\nu}} \quad \text{und} \quad |\varepsilon(\chi^\nu)| = 1, \text{ d. h. } \pi(\chi^\nu)\,\pi(\bar{\chi}^\nu) = q^{2g_0-2+f_\nu}.$$

Doch ist mir das bisher nicht gelungen. Wie mir Herr Witt gesprächsweise mitteilt, folgt die Funktionalgleichung (37) ohne weiteres durch Nullstellenvergleich, wenn die Riemannsche Vermutung ($\vartheta = \frac{1}{2}$) bewiesen ist.

Die *zweiten Koeffizienten* der $L(s, \chi^\nu)$ sind die Summen:

$$(38) \quad \sigma(\chi^\nu) = \sum_{\mathfrak{p} \text{ vom Grad } 1} \chi^\nu(\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{p} \text{ vom Grad } 1} \left(\frac{B^\nu}{\mathfrak{p}}\right) = -\sum_{\varkappa=1}^{2g_0-2+f_\nu} \varpi_{\nu\varkappa}.$$

Nach (16) können diese auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\sigma(\chi^\nu) = \sum_{\mathfrak{p} \text{ vom Grad } 1} \chi((B^\nu)_\mathfrak{p}), \tag{39}$$

wo $(B^\nu)_\mathfrak{p}$ den konstanten Rest eines zu B^ν gehörigen gemäß (7) für $\mathfrak{p}$ reduzierten Elements mod. $\mathfrak{p}$ bezeichnet und der χ-Wert als 0 zu rechnen ist, falls dort $\lambda > 0$ ausfällt, d. h. falls $\mathfrak{p}$ im Führer $\mathfrak{f}_\nu$ aufgeht.

Im Spezialfall, daß K *vom Geschlecht* $g_0 = 0$ ist, sind diese Summen in der Literatur als

Charaktersummen	*Exponentialsummen*

bekannt [12]). Um auf die gewohnte Schreibweise zu kommen, sei $B = B(x)$ gemäß (6) reduziert angenommen. Dann wird nach (17):

$$\sigma(\chi^\nu) = \sum_{a \text{ in } k^*} (B^\nu(a)). \tag{40}$$

Dabei deutet k^* an, daß auch über $a = \infty$ zu summieren ist (entsprechend dem Nenner $\mathfrak{p}_\infty$ von x); ferner ist der χ-Wert als 0 zu rechnen für alle diejenigen a, für die das zugeordnete $\mathfrak{p}$ $\left(\text{mit } x - a = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}\text{; bzw. } \mathfrak{p}_\infty \text{ zu } a = \infty\right)$ in $\mathfrak{f}_\nu$ aufgeht.

Allgemein ist nach (31), (32), (35)

$$\bar{N}_1 - (q+1) = (N_{01} - (q+1)) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma(\chi^\nu). \tag{41}$$

Hieraus und aus den Ausführungen in H. I, § 8 geht hervor, daß das Problem der Abschätzung der Summen $\sigma(\chi^\nu)$, inkl. die Abschätzung der Abweichung $N_{01} - (q+1)$ für K, äquivalent ist mit dem Problem der Abschätzung der Abweichung $\bar{N}_1 - (q+1)$ für Z, und daß beide endgültig gelöst sind, wenn die Riemannsche Vermutung ($\vartheta = \frac{1}{2}$) für die Zetafunktion $\zeta_Z(s)$ von Z bewiesen ist. Dieser Zusammenhang war bisher insbesondere für die Exponentialsummen nicht bekannt, zu denen z. B. auch die Kloostermanschen Summen gehören $\left(B(x) = x + \frac{c}{x}\right)$. Ferner sei auf die hier resultierende Verallgemeinerung der bisher studierten Charakter- und Exponentialsummen hingewiesen, die darin besteht, daß statt einer rationalen Funktion $B = B(x)$ allgemeiner eine algebraische Funktion B (Element eines algebraischen Funktionenkörpers K mit Geschlecht $g_0 > 0$) steht.

Für K *vom Geschlechte* $g_0 = 0$ fällt der Summand $N_{01} - (q+1)$ in (41) natürlich fort, da dann $L_K(s) = 1$ ist. Teilresultate in Richtung auf die Riemannsche Vermutung sind dann — sei es durch Abschätzung der Summen $\sigma(\chi^\nu)$, sei es durch Abschätzung der Abweichung $\bar{N}_1 - (q+1)$, also im wesentlichen der Lösungsanzahl N in k der Grundgleichung

$y^n = B(x)$	$y^p - y = B(x)$

von Z (siehe dazu H. I, Satz 8, 9) — in einer Anzahl von Spezialfällen für B und n bekannt [13]). Allerdings ist dabei durchweg noch die auf der Hand liegende Übertragung vom Primkörper (Restklassenkörper mod. p) auf einen beliebigen endlichen Körper k

---

[12]) Diese Ausdrücke werden gebraucht in der neueren Arbeit über solche Summen von H. Davenport, On certain exponential sums, Journ. f. Math. **169** (1933).

[13]) E. Jacobsthal, Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Diss. Berlin 1906.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A new solution of Waring's Problem, Quart. Journ. **48** (1920), p. 277 f.

H. D. Kloosterman, On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, Acta math. **49** (1926), p. 420.

vorzunehmen, um den in H. I, § 8 auseinandergesetzten Artinschen Schluß auf die Riemannsche Vermutung zu machen.

Mit weiteren arithmetisch besonders interessanten Spezialfällen beschäftigt sich eine demnächst in diesem Journal erscheinende Arbeit von Davenport und mir.

H. Hopf, Über die Verteilung quadratischer Reste, Math. Zeitschr. **32** (1930).

H. Davenport, On the distribution of quadratic residues mod. p, I, II, Journ. Lond. Math. Soc. **6** (1931), **8** (1933);

On the distribution of the lth power residues mod. p, Journ. Lond. Math. Soc. **7** (1932);

On certain exponential sums, Journ. f. Math. **169** (1933).

H. Salié, Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$, Math. Zeitschr. **34** (1931);

Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, Math. Zeitschr. **36** (1932).

L. J. Mordell, On a sum analogous to a Gauss's sum, Quart. Journ., Oxford Ser., **3** (1932);

The number of solutions of some congruences in two variables, Math. Zeitschr. **37** (1933).

Eingegangen 10. März 1934.

Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper.

Von *Helmut Hasse* in Marburg.

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem beliebigen vollkommenen Körper k als Konstantenkörper; es seien also die Forderungen H. (1.), (2.) [1]) und dann auch die dort hervorgehobene Folgerung (3.) erfüllt.

Grundlegend für die Theorie der Divisorenklassen von K, insbesondere für den Begriff des Geschlechts und den Riemann-Rochschen Satz, ist die Theorie der Differentiale von K. Von F. K. Schmidt ist diese in A. Z. § 5 [2]) nur als Theorie der Differentialquotienten entwickelt (die dortige Beschränkung auf absolut-algebraische Konstantenkörper k von Primzahlcharakteristik p statt beliebiger vollkommener k ist unwesentlich). Für die Anwendungen, insbesondere auf das Abelsche Theorem, ist jedoch die Übertragung des aus der klassischen Theorie (k der Körper aller komplexen Zahlen) bekannten formalen Differentialbegriffs zweckmäßig. Das soll nachstehend geschehen.

Ich führe die Theorie zunächst ausführlich im Fall eines *algebraisch-abgeschlossenen* (also sicher vollkommenen) Konstantenkörpers k durch, dessen Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl) sei. Zum Schluß zeige ich kurz, wie man vom algebraisch-abgeschlossenen Fall aus die Theorie auch bei beliebigem vollkommenen Konstantenkörper k beherrscht.

§ 1. Definition der Differentiale.

Alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K haben den Grad 1, und die zugehörige perfekte Erweiterung $K_\mathfrak{p}$ von K ist der Körper aller Potenzreihen in einem beliebig gewählten Primelement t zu $\mathfrak{p}$ mit konstanten (d. h. zu k gehörigen) Koeffizienten. *Potenzreihe* ist dabei durchweg in dem allgemeinen Sinne verstanden, daß endlich viele Glieder mit negativen Potenzen zugelassen sind; sind keine solchen Glieder vorhanden, so heißt die Potenzreihe *ganz*, und ist zudem das absolute Glied nicht Null, *Einheitspotenzreihe*.

Seien x, y beliebige Elemente aus K und

$$(1) \qquad x = \sum_\nu a_\nu t^\nu \qquad y = \sum_\nu b_\nu t^\nu$$

ihre Entwicklungen nach einem beliebigen Primelement t zu einem beliebigen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K. Dann bilde ich die formale Ableitung

$$\frac{dx}{dt} = \sum_\nu \nu a_\nu t^{\nu-1}$$

[1]) Mit H. zitierte ich meine kürzlich erschienene Arbeit: Über die Kongruenzzetafunktionen, Berliner Sitzungsberichte 1934.

[2]) Mit A. Z. zitiere ich die Arbeit von F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **33** (1931).

und das Produkt

$$(2) \qquad y\frac{dx}{dt} = \sum_{\nu} b_\nu t^\nu \cdot \sum_{\nu} \nu a_\nu t^{\nu-1} = \sum_{\nu} c_\nu t^\nu .$$

Die Gesamtheit der so den gegebenen Elementen x, y für alle $\mathfrak{p}$ und alle zugehörigen t zugeordneten Entwicklungen nenne ich *das Differential* $y\,dx$.

Zwei Differentiale $y_1\,dx_1$ und $y_2\,dx_2$ heißen *gleich*, wenn die zugehörigen Entwicklungen für jedes $\mathfrak{p}$ und jedes zugehörige t übereinstimmen. $y\,dx = 0$ bedeutet, daß alle Entwicklungen formal 0 sind.

Die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primelemente u (in $K_\mathfrak{p}$) entsteht aus einem t durch die Gesamtheit aller Substitutionen

$$(3) \qquad t = e_1 u + e_2 u^2 + \cdots$$

mit beliebigen konstanten e_ν und $e_1 \neq 0$, die durch Substitutionen der gleichen Form eindeutig umkehrbar sind. Die Ausführung einer Substitution (3) in der Entwicklung (2) geschieht nach dem Schema:

$$(4) \qquad y\frac{dx}{du} = y\frac{dx}{dt}\frac{dt}{du} = \sum_{\nu} c_\nu t^\nu \cdot \frac{dt}{du} = \sum_{\nu} c_\nu \Big(\sum_{\mu} e_\mu u^\mu\Big)^\nu \cdot \sum_{\nu} \nu e_\nu u^{\nu-1} = \sum_{\nu} \bar{c}_\nu u^\nu .$$

Hiernach genügt für die Gleichheit von $y_1 dx_1$ und $y_2 dx_2$ schon das Übereinstimmen der zugehörigen Entwicklungen für je *ein* Primelement t zu jedem $\mathfrak{p}$, und entsprechend für $y\,dx = 0$.

§ 2. Die Invarianten eines Differentials.

Jedem Differential $y\,dx$ lassen sich für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ zwei von der Wahl des Primelements t unabhängige Invarianten (gegen die gemäß (4) ausgeführten Substitutionen (3)) zuordnen:

a) die *Ordnungszahl* $\nu_\mathfrak{p}(y\,dx)$, erklärt als der Exponent des ersten von Null verschiedenen Gliedes $c_\nu t^\nu$ in (2) (oder als ∞, falls kein solches Glied vorhanden),

b) das *Residuum* $\varrho_\mathfrak{p}(y\,dx)$, erklärt als der Koeffizient c_{-1} von t^{-1} in (2).

Invarianzbeweis. a) Das folgt ohne weiteres aus $e_1 \neq 0$ in (3).

b) Das ist einer der Hauptpunkte dieser Note, und zwar liegt der Nachdruck auf der Bewältigung der Schwierigkeit, die in der Zulassung einer Primzahlcharakteristik p liegt. Ich zeige, daß bei gliedweiser Ausführung einer Substitution (3) gemäß (4) in (2) nur das Glied $c_{-1}\,t^{-1}$ einen Beitrag zum Koeffizienten von u^{-1} liefert, und zwar den Beitrag c_{-1}.

Dies ist klar für die Glieder $c_\nu t^\nu$ mit $\nu \geqq 0$; und auch, daß $c_{-1}\,t^{-1}$ den Beitrag c_{-1} liefert, sieht man sofort. Es bleibt also — in geänderter Bezeichnung — zu zeigen, daß

$$\frac{1}{t^{\nu+1}}\frac{dt}{du} = \frac{1}{(\sum_{\mu} e_\mu u^\mu)^{\nu+1}} \sum_{\mu} \mu e_\mu\, u^{\mu-1}$$

für jedes $\nu \geqq 1$ frei von u^{-1} ist.

Auch dies ist klar, wenn $\nu \not\equiv 0 \bmod p$ ist (also insbesondere für $p = 0$), da dann

$$\frac{1}{t^{\nu+1}}\frac{dt}{du} = -\frac{1}{\nu}\frac{d}{du}\frac{1}{t^\nu}$$

ist und jede Ableitung nach u einer Potenzreihe in u frei von u^{-1} ist.

Sei jetzt $p \neq 0$ und allgemein $\nu = \nu_0 p^k$ mit zu p primem ν_0. Wird

$$\frac{1}{t^{\nu_0}} = P(u) = \frac{1}{u^{\nu_0}}\left(\frac{1}{e_1^{\nu_0}} + \cdots\right)$$

gesetzt, so ist

$$\frac{1}{t^{\nu+1}}\frac{dt}{du}=\frac{1}{t^{\nu_0 p^k}}\frac{1}{t}\frac{dt}{du}=P(u)^{p^k}\left(-\frac{1}{\nu_0}\frac{P'(u)}{P(u)}\right).$$

Zur Berechnung des Gliedes mit u^{-1} darf die Potenzreihe $P(u)$ durch einen hinreichend hohen Näherungswert $P_0(u)$ ersetzt werden. Es ist dann

$$\frac{P_0'(u)}{P_0(u)}=-\frac{\nu_0}{u}+\sum_\alpha\frac{1}{u-\alpha},$$

wo die Summe über die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen α der rationalen Funktion $P_0(u)$ zu erstrecken ist, die sicher von der (einzigen) Unendlichkeitsstelle 0 verschieden sind. Nach Potenzen von u entwickelt ist also

$$-\frac{P_0'(u)}{P_0(u)}=\frac{\nu_0}{u}+\frac{1}{u}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_\alpha\frac{1}{\alpha^\mu}u^\mu.$$

Beim Ausmultiplizieren mit $P_0(u)^{p^k}=P_0^{p^k}(u^{p^k})$ (wo $P_0^{p^k}$ das Potenzieren der Koeffizienten mit p^k andeutet) entstehen nun Glieder mit u^{-1} höchstens von $\frac{\nu_0}{u}$ und den Gliedern mit $\mu=\mu_0 p^k$ herrührend. Das Glied mit u^{-1} bleibt also ungeändert, wenn man $-\frac{P_0'(u)}{P_0(u)}$ weiter ersetzt durch

$$\begin{aligned}&\frac{\nu_0}{u}+\frac{1}{u}\sum_{\mu_0=1}^{\infty}\sum_\alpha\frac{1}{\alpha^{\mu_0 p^k}}u^{\mu_0 p^k}=\frac{\nu_0}{u}+\frac{1}{u}\left(\sum_{\mu_0=1}^{\infty}\sum_\alpha\frac{1}{\alpha^{\mu_0}}u^{\mu_0}\right)^{p^k}\\&=\frac{\nu_0}{u}+\frac{u^{p^k}}{u}\left(\frac{1}{u}\sum_{\mu_0=1}^{\infty}\sum_\alpha\frac{1}{\alpha^{\mu_0}}u^{\mu_0}\right)^{p^k}=\frac{\nu_0}{u}+\frac{u^{p^k}}{u}\left(-\frac{\nu_0}{u}-\frac{P_0'(u)}{P_0(u)}\right)^{p^k}\\&=-\frac{u^{p^k}}{u}\frac{P_0'(u)^{p^k}}{P_0(u)^{p^k}}.\end{aligned}$$

Insgesamt ist also das zu bestimmende Glied mit u^{-1} auch als solches in

$$P_0(u)^{p^k}\cdot\left(-\frac{1}{\nu_0}\frac{u^{p^k}}{u}\frac{P_0'(u)^{p^k}}{P_0(u)^{p^k}}\right)=-\frac{1}{\nu_0}\frac{1}{u}\left(u\,P_0'(u)\right)^{p^k}$$

zu finden. Hierin gibt es aber kein Glied mit u^{-1}, da $u\,P_0'(u)$ kein absolutes Glied enthält.

Damit ist der Invarianzbeweis erbracht.

§ 3. Verschwinden eines Differentials.

Natürlich ist $y\,dx=0$, wenn $y=0$ ist. Ist aber $y\neq 0$, so ist keine $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von y formal 0, also $y\,dx=0$ dann und nur dann, wenn $dx=0$ ist. Darüber gilt nun:

Satz 1. *Es ist dann und nur dann $dx=0$, wenn x konstant (in k) ist, oder wenn $K/k(x)$ inseparabel-algebraisch ist, wenn also für ein K über $k(x)$ erzeugendes Element y die zugeordnete in k irreduzible Grundgleichung $f(x,y)=0$ inseparabel in y ist.*

Ist $dx\neq 0$, so ist für kein $\mathfrak{p}$ die zugehörige $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung formal 0.

Beweis. Der triviale Fall eines konstanten x kann beiseite gelassen werden. Ist x nicht konstant, also transzendent über k (nach H. (2)), so folgt aus dem formalen Bestehen von $f(x,y)=0$ für alle $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklungen durch Differentiation nach t:

$$f_x(x,y)\frac{dx}{dt}+f_y(x,y)\frac{dy}{dt}=0. \tag{5}$$

Ist nun $K/k(x)$ inseparabel, so ist $f_y(x, y) = 0$. Dann ist notwendig $f_x(x, y) \neq 0$, da sonst $f(x, y)$ nicht irreduzibel wäre (sondern identisch $f(x, y) = f_0(x, y)^p$). Somit folgt $\frac{dx}{dt} = 0$ für alle $\mathfrak{p}$, also $dx = 0$.

Ist umgekehrt $dx = 0$, oder auch nur $\frac{dx}{dt} = 0$ für *ein* $\mathfrak{p}$, so ist sicher $\frac{dy}{dt} \neq 0$; denn sonst träten in den beiden Entwicklungen (1) für x und y nur Glieder mit $\nu \equiv 0 \bmod. p$ auf, also auch in den t-Entwicklungen aller Elemente y von $K = k(x, y)$, während doch in K ein genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbares Element existiert, dessen t-Entwicklung also mit einem Gliede at mit $a \neq 0$ beginnt. Aus (5) folgt daher dann $f_y(x, y) = 0$, d. h. die Inseparabilität von $f(x, y)$ in y, also von $K/k(x)$.

§ 4. Die erste Invariante.

Ist x nicht konstant und $K/k(x)$ separabel, also nach Satz 1 $dx \neq 0$, und ist auch $y \neq 0$, so ist dem Differential $y\,dx \neq 0$ durch die dann sämtlich endlichen Ordnungszahlen $\nu_\mathfrak{p}(y\,dx)$ ein *Divisor* $\prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(y\,dx)}$ von K zugeordnet, in Zeichen:

$$y\,dx \cong \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(y\,dx)}.$$

Dieser ist das Produkt aus dem y zugeordneten Divisor

$$y \cong \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(y)}$$

und dem dx zugeordneten Divisor

$$dx \cong \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(dx)}.$$

Von dem ersteren Divisor ist bekannt, daß er endlich und vom Grade 0 ist und y bis auf eine Konstante $a \neq 0$ eindeutig festlegt:

(6a) nur endlich viele $\nu_\mathfrak{p}(y) \neq 0$,

(6b) $$\sum_\mathfrak{p} \nu_\mathfrak{p}(y) = 0\,,$$

(6c) aus $\nu_\mathfrak{p}(y_1) = \nu_\mathfrak{p}(y_2)$ für alle $\mathfrak{p}$ folgt $y_1 = a y_2$ mit $a \neq 0$ aus k.

Für den letzteren Divisor gilt in Analogie zur Eigenschaft (6a):

Satz 2. *Ist x nicht konstant und $K/k(x)$ separabel, ist also $dx \neq 0$, so ist der dx zugeordnete Divisor endlich, d. h. nur endlich viele $\nu_\mathfrak{p}(dx) \neq 0$. Und zwar ist*

$$dx \cong \frac{\mathfrak{D}_x}{\mathfrak{n}_x^2},$$

wo $\mathfrak{D}_x$ die Differente von $K/k(x)$ und $\mathfrak{n}_x$ der Nennerdivisor von x ist.

Beweis. Es sei $K_0 = k(x)$, $\mathfrak{p}_0$ ein Primdivisor von K_0, $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{p}_0$ enthaltener Primdivisor von K und t ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ aus K. Da K/K_0 separabel-algebraisch und k vollkommen ist, ist die lokale arithmetische Theorie dafür gültig. Nach ihr ist der Beitrag $\mathfrak{D}_{x\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ zur Differente $\mathfrak{D}_x$ gleich der $\mathfrak{p}$-Potenz in der Differente von t als Element der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung $K_\mathfrak{p}$ in bezug auf die $\mathfrak{p}_0$-adische Erweiterung $K_{0\mathfrak{p}_0}$. Ist genau $\mathfrak{p}^e$ in $\mathfrak{p}_0$ enthalten, so genügt t über K_0 einer Eisensteinschen Gleichung

$$f(t_0, t) = t^e + t_0 g_{e-1}(t_0) t^{e-1} + \cdots + t_0 g_1(t_0) t + t_0 g_0(t_0) = 0,$$

deren Koeffizienten $g_i(t_0)$ ganze Potenzreihen etwa in dem „natürlichen" Primelement $t_0 = x - a$ bzw. $\frac{1}{x}$ zu $\mathfrak{p}_0$ aus K_0 sind, insbesondere $g_0(t_0)$ Einheitspotenzreihe. Analog zu (5) folgt aus dieser Gleichung

$$0 = f_{t_0}(t_0, t)\,\frac{dt_0}{dt} + f_t(t_0, t), \text{ also } \frac{dt_0}{dt} = -\frac{f_t(t_0, t)}{f_{t_0}(t_0, t)}.$$

Hier ist nach dem Gesagten $f_t(t_0, t)$ als die Differente von t in bezug auf $K_{0\mathfrak{p}_0}$ genau durch die $\mathfrak{p}$-Potenz $\mathfrak{D}_{x\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}_{t_0\mathfrak{p}}$ teilbar. Ferner ist

$$f_{t_0}(t_0, t) \equiv g_0(t_0) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p},$$

also prim zu $\mathfrak{p}$, und somit $\frac{dt_0}{dt}$ genau durch die $\mathfrak{p}$-Potenz $\mathfrak{D}_{x\mathfrak{p}}$ teilbar. Daher ist $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt_0}\frac{dt_0}{dt}$ genau durch dieselbe $\mathfrak{p}$-Potenz wie $\frac{dx}{dt_0}\,\mathfrak{D}_{x\mathfrak{p}}$ teilbar.

Nun ist aber

$$\frac{dx}{dt_0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x = a + t_0, \text{ also für } \mathfrak{p}_0 \neq \mathfrak{n}_x, \quad \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}_x \\ -t_0^{-2} & \text{für } x = t_0^{-1}, \text{ also für } \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{n}_x, \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}_x, \end{cases}$$

d. h. $\frac{dx}{dt_0}$ ist genau durch den Beitrag von $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{n}_x^{-2}$ teilbar. Das ergibt die Behauptung.

Das Analogon zur Eigenschaft (6b) lautet:

Satz 3. *Je zwei Differentiale dx_1, $dx_2 \neq 0$ gehören als Divisoren zur gleichen Divisorenklasse W, die hiernach eine Invariante von K ist (Differentialklasse). Insbesondere haben alle Differentialdivisoren $dx \neq 0$ den gleichen nur von K abhängigen Grad f:*

$$\sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}(dx) = f.$$

Dies ergibt sich ohne weiteres aus der zwischen x_1 und x_2 bestehenden irreduziblen nach Satz 1 in x_1 und x_2 separablen Gleichung

$$f(x_1, x_2) = 0$$

und den daraus durch Differentiation folgenden Relationen

$$f_{x_1}(x_1, x_2)\,\frac{dx_1}{dt} + f_{x_2}(x_1, x_2)\,\frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Natürlich sind auch die Divisoren der allgemeinen Differentiale $y\,dx \neq 0$ endlich und gehören sämtlich zur Differentialklasse W. An Stelle des Grades f von W führt man als gleichwertige Invariante das *Geschlecht* g von K durch $f = 2g - 2$ ein. Aus dem Riemann-Rochschen Satz folgt, daß g eine ganze nicht-negative Zahl ist, nämlich die Dimension der Differentialklasse W. Siehe dazu A. Z. §§ 5, 6, sowie auch den demnächst in diesem Journal erscheinenden Beweis von Witt für die Invarianz des Geschlechtes, der wesentlich mit dem hier gegebenen übereinstimmt.

Ist ferner $dx \neq 0$ und y ein beliebiges Element aus K, so geben die Relationen (5) eine eindeutige Definition des *Differentialquotienten*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

als Element aus K. Dieser erscheint nach (5) andrerseits als der wirkliche Quotient der Differentiale dy und dx in dem Sinne, daß seine $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklungen durch Division der Entwicklungen von dy und dx (je nach *demselben* Primelement t zu $\mathfrak{p}$) gewonnen werden. Insbesondere ist der (zur Hauptklasse gehörige) Divisor von $\frac{dy}{dx}$ der Quotient der Differentialdivisoren dy und dx. In A. Z. § 5 ist gezeigt, daß für diese Differentialquotienten in K die formalen Differentiationsregeln gelten, und ferner daß sie — im Gegensatz zu den hier eingeführten Differentialen — unabhängig von dem x

und y enthaltenden algebraischen Funktionenkörper K sind, solange nur K über $k(x)$ separabel ist, so daß also insbesondere K durch den durch y erzeugten Körper $k(x, y)$ ersetzt werden darf.

Als Analogon zur Eigenschaft (6c) hat man:

Satz 4. *Ein Differential $ydx \neq 0$ ist durch seinen Divisor bis auf eine Konstante $a \neq 0$ eindeutig festgelegt:*

aus $v_\mathfrak{p}(y_1 dx_1) = v_\mathfrak{p}(y_2 dx_2)$ für alle $\mathfrak{p}$ folgt $y_1 dx_1 = a y_2 dx_2$ mit $a \neq 0$ aus k.

Denn nach den vorstehenden Ausführungen hat dann das Element $\frac{y_1}{y_2}\frac{dx_1}{dx_2}$ aus K den Divisor 1, ist also eine Konstante $a \neq 0$.

Schließlich sei hier noch folgendes bemerkt: Definiert man die *Addition* zweier Differentiale $y_1 dx_1$ und $y_2 dx_2$ durch gliedweise Addition aller zugehörigen $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklungen (je nach *demselben* Primelement t zu $\mathfrak{p}$), so entsteht so wieder ein Differential $y\,dx$ von K. Denn ist x irgendein Element aus K mit $dx \neq 0$ — nach H. (3) existiert ein solches —, so ist im Sinne der in § 1 gegebenen Gleichheitsdefinition

$$y_1 dx_1 = y_1 \frac{dx_1}{dx} dx, \quad y_2 = y_2 \frac{dx_2}{dx} dx$$

und offenbar

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 = \left(y_1 \frac{dx_1}{dx} + y_2 \frac{dx_2}{dx}\right) dx = y dx \text{ mit } y \text{ aus } K.$$

Hieraus ergibt sich nach dem letzten Teil von Satz 1 noch, daß auch zur Gleichheit zweier Differentiale (ebenso wie für das Verschwinden) schon die Gleichheit der $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklungen für *ein* $\mathfrak{p}$ hinreicht.

Die oben erwähnte Folge $\dim W = g$ aus dem Riemann-Rochschen Satz kann auf Grund der Differentialaddition, analog zur klassischen Theorie der algebraischen Funktionen, auch so ausgesprochen werden:

Satz 5. *Der k-Modul aller ganzen Differentiale von K (Differentiale mit ganzem Divisor) ist vom endlichen Range g.*

§ 5. Die zweite Invariante.

Wie die Ordnungszahlen eines Differentials das Analogon zu den Ordnungszahlen eines Körperelements sind, sind die Residuen eines Differentials das Analogon zu den konstanten Resten eines Körperelements für die verschiedenen Primstellen. Während aber für diese Reste keinerlei Endlichkeitsbedingung und Abhängigkeit im Großen besteht, ist für die Residuen beides der Fall. Es gilt nämlich:

Satz 6 (Residuensatz). *Von den Residuen eines Differentials $y\,dx$ sind nur endlich viele $\varrho_\mathfrak{p}(y\,dx) \neq 0$, und es ist ihre Summe $\sum_\mathfrak{p} \varrho_\mathfrak{p}(y\,dx) = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $y\,dx \neq 0$ vorausgesetzt. Wegen der Endlichkeit des Divisors von $y\,dx$ sind nur endlich viele Residuen $\varrho_\mathfrak{p}(y\,dx) \neq 0$, nämlich höchstens die den Nennerprimdivisoren $\mathfrak{p}$ von $y\,dx$ entsprechenden.

Zum Beweis der Summenrelation sei wieder $K_0 = k(x)$. Wegen $dx \neq 0$ ist K/K_0 separabel-algebraisch, also die lokale arithmetische Theorie gültig. Sei $\mathfrak{p}_0$ ein Primdivisor von K_0. Ich zeige dann, wie in der klassischen Theorie, die Gültigkeit der Relation

$$\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_0} \varrho_\mathfrak{p}(y\,dx) = \varrho_{\mathfrak{p}_0}(S(y)\,dx), \tag{7}$$

wo S die Spur für K/K_0 bedeutet und das Residuum rechts in K_0 verstanden ist. Da in K_0 der Residuensatz in geläufiger Weise aus der Partialbruchzerlegung folgt, ergibt sich aus (7) ohne weiteres die Gültigkeit des Residuensatzes in K.

Die Gültigkeit der Relation (7) läuft durch Übergang zum $\mathfrak{p}_0$-adischen Körper $K_{0\mathfrak{p}_0}$ und zum $\mathfrak{p}_0$-adischen Ring $K_{\mathfrak{p}_0} = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_0} K_{\mathfrak{p}}$ (in direkter Summenzerlegung) zurück auf die Gültigkeit von

$$\varrho_{\mathfrak{p}}(y\,dx) = \varrho_{\mathfrak{p}_0}(S_{\mathfrak{p}}(y)\,dx) \tag{8}$$

für jedes Element y aus $K_{\mathfrak{p}}$, wo $S_{\mathfrak{p}}$ die Spur für $K_{\mathfrak{p}}/K_{0\mathfrak{p}_0}$ bezeichnet und das Residuum rechts in $K_{0\mathfrak{p}_0}$ zu verstehen ist. Ist t_0 ein Primelement zu $\mathfrak{p}_0$ in $K_{0\mathfrak{p}_0}$ und t ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ in $K_{\mathfrak{p}}$, so ist

$$y\,dx = y\,\frac{dx}{dt_0}\,dt_0, \quad S_{\mathfrak{p}}(y)\,dx = S_{\mathfrak{p}}(y)\,\frac{dx}{dt_0}\,dt_0 = S_{\mathfrak{p}}\left(y\,\frac{dx}{dt_0}\right)dt_0,$$

und durch $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $y\,\dfrac{dx}{dt_0}$ erkennt man, daß (8) gleichwertig ist mit der Gültigkeit von

$$\varrho_{\mathfrak{p}}(t^{\nu}\,dt_0) = \varrho_{\mathfrak{p}_0}(S_{\mathfrak{p}}(t^{\nu})\,dt_0) \tag{9}$$

für alle ganzen ν.

Es sei nun genau $\mathfrak{p}^e$ in $\mathfrak{p}_0$ enthalten. Ist dann $e \not\equiv 0 \bmod p$, so ist nach der lokalen arithmetischen Theorie $K_{\mathfrak{p}}/K_{0\mathfrak{p}_0}$ durch die reine Eisensteinsche Gleichung

$$t^e = t_0$$

zwischen einem Primelement t_0 zu $\mathfrak{p}_0$ und einem Primelement t zu $\mathfrak{p}$ erzeugbar. Einerseits ist dann

$$t^{\nu}\,\frac{dt_0}{dt} = t^{\nu} e t^{e-1} = e t^{\nu+e-1},$$

also

$$\varrho_{\mathfrak{p}}(t^{\nu}\,dt_0) = \begin{cases} e & \text{für } \nu = -e \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Andrerseits ist

$$S_{\mathfrak{p}}(t^{\nu}) = \begin{cases} e t_0^{\frac{\nu}{e}} & \text{für } \nu \equiv 0 \bmod e \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also auch

$$\varrho_{\mathfrak{p}_0}(S_{\mathfrak{p}}(t^{\nu})\,dt_0) = \begin{cases} e & \text{für } \nu = -e \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ergibt die Behauptung (9) für $e \not\equiv 0 \bmod p$, insbesondere also für $p = 0$.

Ist jedoch $e \equiv 0 \bmod p$, also sicher $p \neq 0$, so ist $K_{\mathfrak{p}}/K_{0\mathfrak{p}_0}$ allgemeiner nur durch eine nicht-reine Eisensteinsche Gleichung

$$t^e = t_0\left(g_0(t_0) + g_1(t_0)\,t + \cdots + g_{e-1}(t_0)\,t^{e-1}\right) \tag{10}$$

zwischen einem Primelement t_0 zu $\mathfrak{p}_0$ und einem Primelement t zu $\mathfrak{p}$ erzeugt, wo also die

$$g_i(t_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{i\mu} t_0^{\mu}$$

ganze Potenzreihen und $g_0(t_0)$ Einheitspotenzreihe ($a_{00} \neq 0$) ist. Die direkte Aus-

rechnung der Formeln (9) macht dann Schwierigkeiten. Jedoch kommt man durch eine von Rychlík [3]) in der Determinantentheorie angewandte Schlußweise zum Ziel.

Ohne Einschränkung kann durch passende Normierung von t angenommen werden, daß $g_0(t_0) = 1$ ist; man braucht dazu nur t durch $\frac{t}{\gamma_0(t_0)}$ zu ersetzen, wo $\gamma_0(t_0)$ eine solche Einheitspotenzreihe ist, daß $\gamma_0(t_0)^e = g_0(t_0)$ ist, wie sie wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k sicher existiert. Es würde auch für das Folgende schon genügen, nur $g_0(0) = a_{00} = 1$ zu machen; dazu ist t durch $\frac{t}{\gamma_0}$ zu ersetzen, wo $\gamma_0^e = a_{00}$ mit γ_0 in k ist.

Ich betrachte dann an Stelle von (10) die entsprechend gebaute Eisensteinsche Gleichung

$$(\bar{10}) \qquad \bar{t}^e = \bar{t}_0(1 + \bar{g}_1(\bar{t}_0)\,\bar{t} + \cdots + \bar{g}_{e-1}(\bar{t}_0)\,\bar{t}^{e-1}),$$

wo

$$\bar{g}_i(\bar{t}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{i\mu}\bar{t}_0^{\mu}$$

mit einem System algebraisch-unabhängiger Unbestimmten $u_{i\mu}$ über dem Integritätsbereich Γ aller ganzen rationalen Zahlen ist. Die Koeffizienten $\bar{g}_i(\bar{t}_0)$ sind dann also ganze Potenzreihen in $\bar{t}_0$ über dem rein-transzendenten Integritätsbereich $\Gamma[u_{i\mu}]$ und somit sicher Elemente aus dem Körper $\bar{K}_{0\mathfrak{p}_0}$ aller Potenzreihen in $\bar{t}_0$ über der algebraisch-abgeschlossenen Hülle des rein-transzendenten Körpers $\mathsf{P}(u_{i\mu})$, wo P der Körper aller rationalen Zahlen ist. $(\bar{10})$ definiert dann eine algebraische Erweiterung e-ten Grades $\bar{K}_{\mathfrak{p}}/\bar{K}_{0\mathfrak{p}_0}$. Nach der lokalen arithmetischen Theorie ist diese aber durch eine reine Eisensteinsche Gleichung e-ten Grades erzeugbar. Nach dem oben bereits Bewiesenen gilt also:

$$(\bar{9}) \qquad \varrho_{\mathfrak{p}}(\bar{t}^{\nu}d\bar{t}_0) = \varrho_{\mathfrak{p}_0}(S_{\mathfrak{p}}(\bar{t}^{\nu})\,d\bar{t}_0)$$

für alle ganzen ν. Diese Formeln sind nun Identitäten im oben genannten Integritätsbereich $\Gamma[u_{i\mu}]$. In der Tat folgt aus $(\bar{10})$ zunächst durch Ablaufenlassen der Iteration

$$\bar{t}_0 = \bar{t}^e - \bar{t}_0\bar{t}(\bar{g}_1(\bar{t}_0) + \cdots + \bar{g}_{e-1}(\bar{t}_0)\,\bar{t}^{e-2}),$$

daß die Koeffizienten der $\bar{t}$-Entwicklung von $\bar{t}_0$ zu $\Gamma[u_{i\mu}]$ gehören, also auch die Koeffizienten v_μ in

$$\frac{d\bar{t}_0}{d\bar{t}} = \sum_{\mu} v_\mu \bar{t}^{\mu}.$$

Es ist dann

$$\bar{t}^{\nu}\frac{d\bar{t}_0}{d\bar{t}} = \sum_{\mu} v_\mu \bar{t}^{\mu+\nu},$$

also

$$\varrho_{\mathfrak{p}}(\bar{t}^{\nu}d\bar{t}_0) = v_{-\nu-1}.$$

Ferner folgt aus den Newtonschen Formeln für die Potenzsummen (mit beliebigen ganzen Exponenten ν) der Nullstellen von $(\bar{10})$ in $\bar{t}$, daß auch die Koeffizienten $w_{\nu\mu}$ der $\bar{t}_0$-Entwicklungen

---

[3]) K. Rychlík, Eine Bemerkung zur Determinantentheorie, Journ. f. Math. **167** (1932). — Entsprechend kann man übrigens auch sehr einfach den Invarianzbeweis in § 2 führen.

$$S_{\mathfrak{p}}(\bar{t}^{\nu}) = \sum_{\mu} w_{\nu\mu} \bar{t}_0^{\mu}$$

zu $\Gamma[u_{i\mu}]$ gehören. Es ist dann

$$\varrho_{\mathfrak{p}_0}(S_{\mathfrak{p}}(\bar{t}^{\nu}) d\bar{t}_0) = w_{\nu,-1}.$$

Die Formeln $(\bar{9})$ sind also die Identitäten

$$(\bar{9}') \qquad v_{-\nu-1} = w_{\nu,-1}$$

in $\Gamma[u_{i\mu}]$. Diese Identitäten bleiben aber richtig, wenn man von Γ zum Restklassenkörper Γ_p mod. p übergeht und dann für die Unbestimmten $u_{i\mu}$ die Koeffizienten $a_{i\mu}$ der $g_i(t_0)$ aus (10) einsetzt, die ja in dem Erweiterungskörper k von Γ_p liegen. Da hierbei die v_μ und $w_{\nu\mu}$ in die Koeffizienten der t-Entwicklung von $\frac{dt_0}{dt}$ und der t_0-Entwicklungen der $S_{\mathfrak{p}}(\bar{t}^{\nu})$ übergehen, deren Berechnung aus (10) ja nach demselben formal-algebraischen Schema erfolgt, wie die Berechnung der v_μ und $w_{\nu\mu}$ aus $(\bar{10})$, so ergibt sich das Bestehen der Formeln (9) und damit der Beweis des Residuensatzes auch im allgemeinen Falle.

§ 6. Beliebiger vollkommener Konstantenkörper.

Ist der Konstantenkörper k nicht algebraisch-abgeschlossen aber jedenfalls vollkommen, so verstehe ich unter den Differentialen von K einfach die durch Elementpaare x, y aus K gelieferten Differentiale $y\,dx$ von $\bar{K} = K\bar{k}$, wo $\bar{k}$ die algebraisch-abgeschlossene Hülle von k ist.

Wie sich ohne weiteres aus den Ausführungen in H. § 1 ergibt, ist $\bar{K}$ algebraischer Funktionenkörper über $\bar{k}$ als Konstantenkörper. (Hierfür ist die Vollkommenheit von k wesentlich.)

In $\bar{K}$ zerfällt jeder Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K vom Grade m in m verschiedene konjugierte Primdivisoren $\bar{\mathfrak{p}}$ vom Grade 1, entsprechend dem Zerfallen des Restklassenkörpers mod. $\mathfrak{p}$ — einer algebraischen Erweiterung m-ten Grades von k — in die direkte Summe von m Körpern $\bar{k}$ bei der Erweiterung des Koeffizientenkörpers k auf $\bar{k}$. (Auch hierfür ist die Vollkommenheit von k wesentlich.)

Hieraus ergibt sich ohne weiteres:

a) Die Ordnungszahlen $v_{\bar{\mathfrak{p}}_\mu}(y\,dx)$ für die m in $\mathfrak{p}$ aufgehenden $\bar{\mathfrak{p}}_\mu$ sind einander gleich; sie definieren also eindeutig eine *Ordnungszahl* $v_{\mathfrak{p}}(y\,dx) = v_{\bar{\mathfrak{p}}_\mu}(y\,dx)$ und damit einen *Divisor*

$$(11) \qquad ydx \cong \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(y\,dx)} = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\bar{\mathfrak{p}}_\mu | \mathfrak{p}} \bar{\mathfrak{p}}^{v_{\bar{\mathfrak{p}}_\mu}(y\,dx)}$$

von K.

b) Die Residuen $\varrho_{\bar{\mathfrak{p}}}(ydx)$ für die m in $\mathfrak{p}$ aufgehenden $\bar{\mathfrak{p}}_\mu$ sind zueinander konjugiert in bezug auf k; sie definieren also eindeutig ein *Residuum*

$$(12) \qquad \varrho_{\mathfrak{p}}(ydx) = \sum_{\bar{\mathfrak{p}}_\mu | \mathfrak{p}} \varrho_{\bar{\mathfrak{p}}_\mu}(y\,dx)$$

als Element aus k.

Da k nach der Forderung H. (2) in K algebraisch-abgeschlossen ist, ist $K/k(x)$ mit $\bar{K}/\bar{k}(x)$ gleichzeitig transzendent oder algebraisch (je nachdem x in k liegt oder nicht) und im letzteren Falle von gleichem Grad, also auch gleichzeitig separabel oder inseparabel. Daher gilt Satz 1 wörtlich auch für beliebige vollkommene k.

Ferner überträgt sich auch Satz 2 wörtlich. Denn die Differente $\mathfrak{D}_x$ von $K/k(x)$ und natürlich auch der Nenner $\mathfrak{n}_x$ von x in K sind im gleichen Sinne bei Übergang zu $\bar{K}/\bar{k}(x)$ invariant wie nach der gegebenen Definition (11) der Differentialdivisor $y\,dx$. Siehe dazu A. Z. § 2, 4.

Daß auch die Sätze 3 und 4 sich wörtlich übertragen, liegt unmittelbar auf der Hand, einfach weil $f_{x_1}(x_1, x_2)$ und $f_{x_2}(x_1, x_2)$ für x_1, x_2 aus K ebenfalls zu K gehören. Diese Tatsachen sind ja auch bereits in A. Z. § 5, ohne vorherigen Übergang zur algebraisch-abgeschlossenen Hülle $\bar{k}$ von k, direkt aus der Theorie der Differentialquotienten entwickelt worden (die dortige Beschränkung auf absolut-algebraische Konstantenkörper k von Primzahlcharakteristik p statt beliebiger vollkommener k ist unwesentlich). Dasselbe gilt auch hinsichtlich Satz 5, da der Riemann-Rochsche Satz für beliebige vollkommene Konstantenkörper k gilt.

Für Satz 6, den Residuensatz, ist die Gültigkeit bei beliebigem vollkommenen Konstantenkörper k ohne weiteres aus der gegebenen Definition (12) der Residuen für K klar.

Zusatz bei der Korrektur. Der Aufbau der Differentialtheorie kann auch von vornherein für beliebige vollkommene Konstantenkörper, also ohne Vorwegnahme des algebraisch-abgeschlossenen Falls, erfolgen. Man definiert dabei die Differentiale aus den Potenzreihenentwicklungen der Elemente aus K nach einem Primelement t zu $\mathfrak{p}$ mit Koeffizienten aus der in $K_\mathfrak{p}$ algebraisch-abgeschlossenen Hülle $k_\mathfrak{p}$ von k. Dieser Körper $k_\mathfrak{p}$ ist sozusagen der lokale Konstantenkörper für $\mathfrak{p}$. Er ist algebraisch vom Grade m über k, wenn $\mathfrak{p}$ vom Grade m ist, und seine Elemente bilden ein volles Restsystem mod. $\mathfrak{p}$. Ich werde darauf bei späterer Gelegenheit zurückkommen.

Eingegangen 19. März 1934.